



6.6 双线性变换法

- 冲激响应不变法的缺点是产生频率响应的混叠失真。
- 产生原因：从 s 平面到 z 平面的映射不是一一对应的，是多值的映射关系。 
- 解决方法：寻找一个具有一一对应的映射关系。双线性变换法就是其中一个。

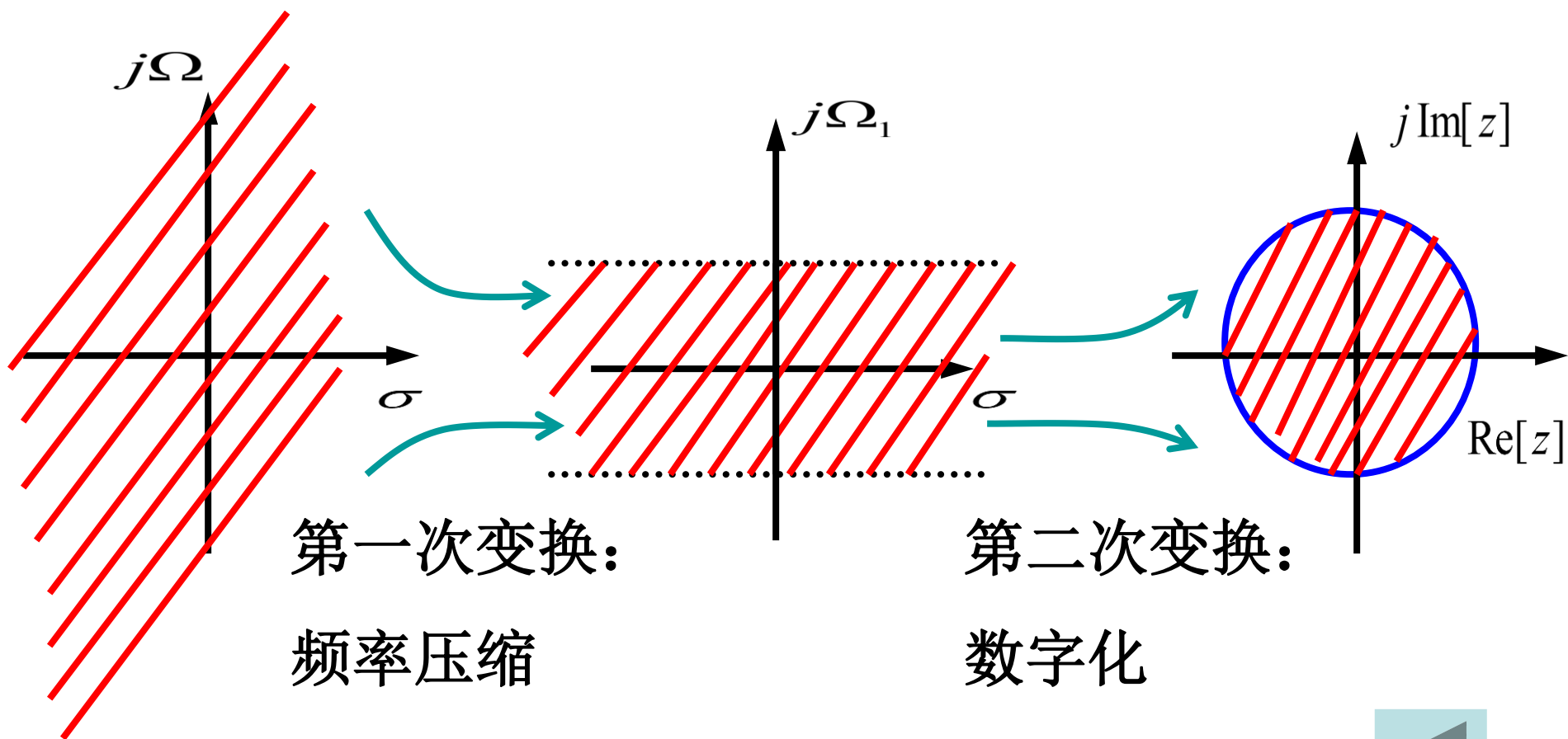
一、变换原理

- 先将整个 s 平面压缩变换到某一个中介的 s_1 平面的一条横带 $(-\pi/T, \pi/T)$
- 也就是将角频率从 $(-\infty, \infty)$ 压缩到 $(-\pi/T, \pi/T)$ 
- 再将该横带用标准变换公式 $z = e^{s_1 T}$ 映射到整个 z 平面。
- 从 s 平面到 z 平面是严格的一一对应关系，故能消除频率响应的混叠失真现象。

S
平面

S₁
平面

Z
平面



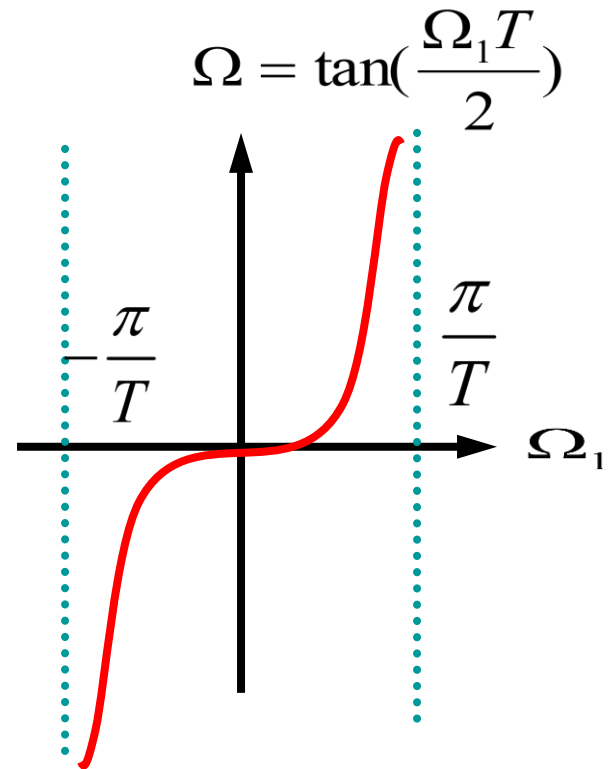
- 将 s 平面整个 $j\Omega$ 轴压缩到 s_1 平面的 $j\Omega_1$ 轴上的一段 $(-\pi/T, \pi/T)$ ，可以采用以下变换实现



$$\Omega = \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$

$$\Omega = \pm\infty \quad \longrightarrow \quad \Omega_1 = \pm\frac{\pi}{T}$$

$$\Omega = 0 \quad \longrightarrow \quad \Omega_1 = 0$$



变换又可以写成（利用欧拉公式）

$$\Omega = \frac{\sin(\frac{\Omega_1 T}{2})}{\cos(\frac{\Omega_1 T}{2})} = \frac{\frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}} \right)}{\frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}} \right)}$$



将此映射延拓到整个 s 平面和 s_1 平面，即令

$$j\Omega = s, \quad j\Omega_1 = s_1$$

有，



$$s = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} = \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

再将 s_1 平面通过标准变换 $z = e^{s_1 T}$ 映射到 z 平面

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad or \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$



双线性变换公式

- 为了使模拟滤波器的某一个频率与数字滤波器的任一频率有对应关系，引入常数 **c**，则，数字频率和模拟频率中间的关系为：



$$\Omega = c \bullet \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = c \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



s 与 s_1 平面中间的映射为：



$$s = c \frac{1 - e^{s_1 T}}{1 + e^{s_1 T}}$$

- 将 $z = e^{s_1 T}$ 代入，得到 **s** 平面与 **z** 平面之间具有单值映射关系的双线性变换。

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad or \quad z = \frac{c + s}{c - s}$$

二、变换常数 c 的选择

- 通过常数 c 可以调节数字频率和模拟频率之间的对应关系。
- 两种方法：
 - 低频特性近似
 - 特定频率（截止频率）对应

(1) 低频特性近似

使模拟滤波器与数字滤波器在低频处有较确切的对应关系，即 $\Omega \approx \Omega_1$

当 Ω_1 较小时，有 $\tan(\frac{\Omega_1 T}{2}) \approx \frac{\Omega_1 T}{2}$

故有， $\Omega \approx \Omega_1 \approx c \frac{\Omega_1 T}{2}$ 

求出， $c = \frac{2}{T}$

➡ 优点：在低频处，频率响应特性近似。

(2) 特定频率对应

数字滤波器的某一个特定频率（例如截止频率 $\omega_c = \Omega_{1c}T$ 与模拟滤波器的一个特定频率 Ω_c 严格对应。

$$\Omega_c = c \bullet \tan\left(\frac{\Omega_{1c}T}{2}\right) = c \bullet \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

则有，

$$c = \Omega_c \cot\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

➡ 优点：可以准确控制截止频率的位置。

三、逼近情况

(1) 频率响应是否近似？

将 $z = e^{j\omega}$ 代入双线性变换公式，有

$$s = c \bullet \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = jc \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$



即，**s** 平面的虚轴确实与 **z** 平面的单位圆对应。

也即，数字滤波器的频率响应和模拟滤波器的频率响应是对应的。

(2) 是否因果稳定?

将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入双线性公式, 有

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{c + s}{c - s} = \frac{(c + \sigma) + j\Omega}{(c - \sigma) - j\Omega}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

当 $\sigma < 0$ 时, 有 $|z| < 1$; s 左半平面 \rightarrow z 平面单位圆内

当 $\sigma > 0$ 时, 有 $|z| > 1$; s 右半平面 \rightarrow z 平面单位圆外

当 $\sigma = 0$ 时, 有 $|z| = 1$, s 平面虚轴 \rightarrow z 平面单位圆上

- 故, 因果稳定的模拟滤波器经过双线性变换后得到的数字滤波器也是因果稳定的。

四、优缺点

(1) 优点

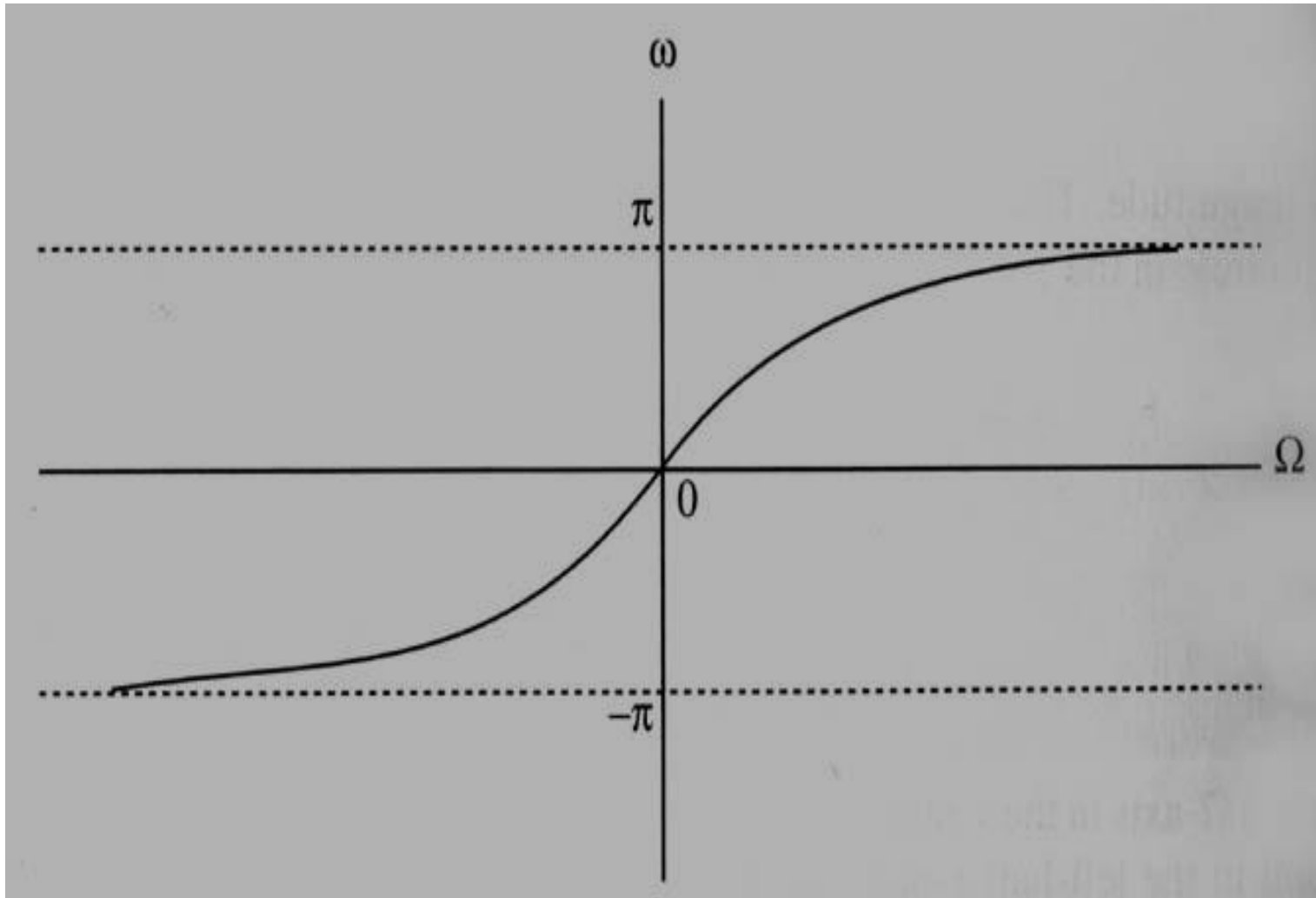
避免了频率响应的混叠失真现象。

模拟（角）频率 Ω 与数字频率 ω 之间的关系：

$$\Omega = c \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Ω 和 ω 是一一对应关系
- $\Omega \in (-\infty, \infty)$ 映射为 $\omega \in (-\pi, \pi)$

$$\Omega = c \tan(\omega / 2)$$



(2) 缺点

- ① 模拟（角）频率 Ω 与数字频率 ω 之间不再是线性关系。（在零频率点附近，接近线性关系；但随着 Ω 的增加，非线性关系越明显。

$$\Omega = c \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



即，双线性变换避免了频率混叠失真现象，但却带来了非线性的频率失真。

(2) 缺点

② 非线性变换就不能保持原来的线性相位了。

③ 不适合设计线性相位数字滤波器

- 在实际应用中，双线性变换必须要求模拟滤波器的幅度（频）响应必须是分段常数型的，即某一频率段的幅频响应是一个常数。
- 典型的低通、带通、高通、带阻型滤波器均满足此要求。

五、模拟滤波器数字化方法

1. 根据要求，设定所要设计的数字滤波器指标。
2. 将各分段频率临界点预畸变。将数字滤波器的性能指标转换为中间模拟滤波器的性能指标。

$$\Omega = C \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \Big|_{\text{在低频处}} \\ = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

3. 根据中间模拟滤波器的性能指标，设计出模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。

4. 选定双线性变换常数C。

$$c \Big|_{\text{在低频处}} = \frac{2}{T}$$

5.用：

$$S = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Big|_{\text{在低频处}} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

代入 $H_a(s)$ 中，得到DF 的 $H(z)$ 。

设计结束

六、用列表格的办法来完成双线性变换设计

不要求，请感兴趣的同学看书**P300-301**。

例题：已知，某一个模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 4}$$

采用双线性变换法求数字滤波器的系统函数**H(z)**（**T=1**）

解：

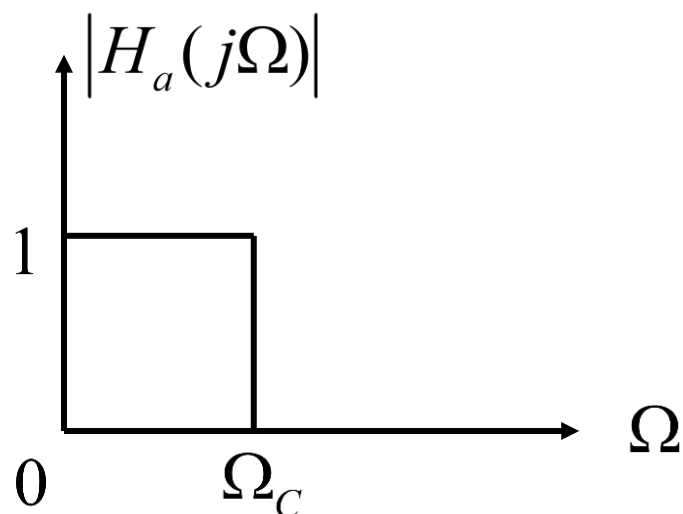
$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{3}{s^2 + 5s + 4} \bigg|_{s=2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{3}{\left(2 \bullet \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 5 \left(2 \bullet \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 4} \\
&= \frac{3 \bullet (1+z^{-1})^2}{4 \bullet (1-z^{-1})^2 + 5 \bullet 2 \bullet (1-z^{-1})(1+z^{-1}) + 4 \bullet (1+z^{-1})^2} \\
&= \frac{3 \bullet (1+z^{-1})^2}{18 - 2z^{-2}} = \frac{3 + 6z^{-1} + 3z^{-2}}{18 - 2z^{-2}} = \frac{1}{6} \bullet \frac{(1+z^{-1})^2}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}
\end{aligned}$$

6.7 模拟原型低通滤波器设计

- 数字滤波器的主要设计方法之一是先设计一个满足技术指标的**模拟低通滤波器**（称作**模拟原型滤波器**），然后再变换为所需的数字滤波器。
- 模拟低通滤波器有巴特沃思型、切贝雪夫型和考尔型（椭圆滤波器）。高通、带通、带阻等滤波器均可通过低通滤波器变换得到。

- 设计模拟滤波器就是根据设计规范来设计模拟系统函数 $H_a(s)$ ，使其逼近某一个理想滤波器特性。
- 滤波器的设计，主要根据其幅度平方函数来进行。



理想低通滤波器的幅频特性

一、由幅度平方函数确定系统函数

模拟滤波器幅度响应常用幅度平方函数表示

$$|H_a(j\Omega)|^2$$

因为滤波器冲激响应 $h(t)$ 是实函数，故

$$H_a^*(j\Omega) = H_a(-j\Omega)$$

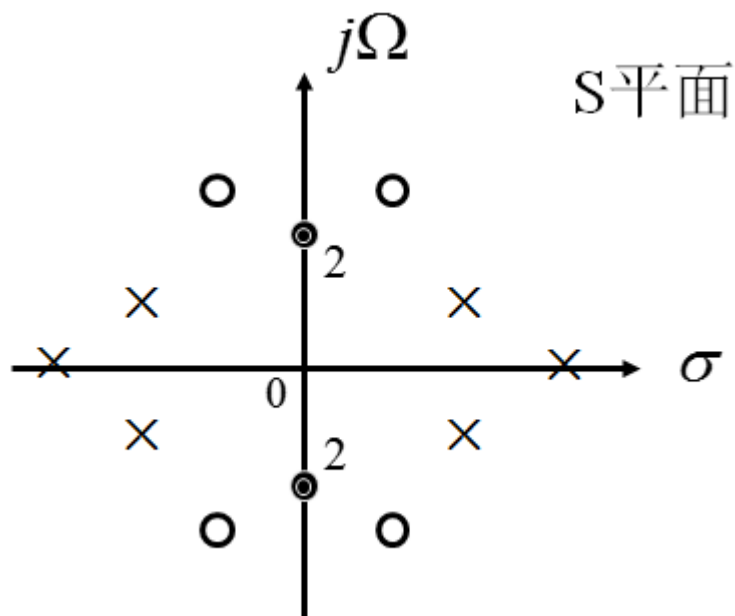
幅度平方函数表示为

$$\begin{aligned} |H_a(j\Omega)|^2 &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\ &= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega} \end{aligned}$$

➡ 问题：如何由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求 $H_a(s)$ ？

(1) $H_a(s), H_a(-s)$ 的零极点分布

- 若 $H_a(s)$ 有一个极点（零点）位于 $s = s_0$ ，则在 $s = s_0^*$ 也必是极点（零点）。
- $H_a(-s)$ 在 $s = -s_0$ 和 $s = -s_0^*$ 必有极点（零点）。
- 若在虚轴有极点（零点），一定是二阶的。
- 零极点分布如图所示。



- 任何物理可实现的滤波器都是因果稳定的，故极点分布为：
 - $H_a(s)$ 的极点位于 s 的左半平面
 - $H_a(-s)$ 的极点位于 s 的右半平面
- 零点分布没有限制，只和滤波器的相位特性有关。
 - 如果滤波器要求最小相位延时特性，则 $H_a(s)$ 的零点均在 s 的左半平面。
 - 如果没有特殊要求，则任取一半即可。

(2) 由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定 $H_a(s)$ 的步骤

- ① 由 $|H_a(j\Omega)|^2|_{\Omega^2=-s^2} = H_a(s)H_a(-s)$ 得到 s 平面函数
- ② 将 $H_a(s)H_a(-s)$ 因式分解，得到零极点。
- ③ 选择合适的零极点。
- ④ 按照 $H_a(j\Omega)$ 与 $H_a(s)$ 的低频特性或者高频特性，确定 $H_a(s)$ 的增益常数。
- ⑤ 由零点、极点、增益常数即可确定 $H_a(s)$

例题：

根据幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定系统函数 $H_a(s)$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{16(25 - \Omega^2)^2}{(49 + \Omega^2)(36 + \Omega^2)}$$

解：

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{16(25 + s^2)^2}{(49 - s^2)(36 - s^2)}$$

其极点为： $s = \pm 7, s = \pm 6$

其零点为： $s = \pm j5$ (二阶)

选择： 极点为： $s = -7, s = -6$

零点为： $s = \pm 5j$

得到 $H_a(s)$ 的表达式

$$H_a(s) = K_0 \frac{s^2 + 25}{(s + 7)(s + 6)}$$

根据条件：

$$H_a(s)|_{s=0} = H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

求出增益： $K_0 = 4$

故，系统函数为

$$H_a(s) = \frac{4(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)} = \frac{4s^2 + 100}{s^2 + 13s + 42}$$

二、巴特沃思低通滤波器

1 巴特沃思低通滤波器定义

- 巴特沃思（**Butterworth**）滤波器又称作最平幅度特性滤波器；
- **1930**年英国工程师**Butterworth**在英国《无线电工程》期刊提出；
- 巴特沃思低通滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



式中，**N**为滤波器的阶数， Ω_c 为截止频率
幅度频率响应

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$





当 $\Omega = \Omega_c$ 时，有

$$|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|H_a(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \delta_1 = 20 \log \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right| = 3dB$$

所以，又称 Ω_c 为巴特沃思低通滤波器的**3dB带宽**

2 巴特沃思低通滤波器的特点

1. 当 $\Omega = 0$ 时, $|H_a(j0)|^2 = 1$, 即在 $\Omega = 0$ 处没有衰减。
2. 当 $\Omega = \Omega_c$ 时, $\delta_1 = 3dB$, 通带最大衰减为 $3dB$
3. 不管N值如何, 所有的曲线都通过 $3dB$ 点, 或者说衰减 $3dB$, 叫做 $3dB$ 不变性。
4. 在 $\Omega < \Omega_c$ 的通带内, $|H_a(j\Omega)|^2$ 有最大平坦的幅度特性, 即N阶巴特沃思低通滤波器在 $\Omega = 0$ 处, $|H_a(j\Omega)|^2_{\Omega=0}$ 的前 $(2N-1)$ 阶导数为零。故巴特沃思滤波器又称为最平幅度特性滤波器。
5. 随着 Ω 由0变为 Ω_c , $|H_a(j\Omega)|^2$ 单调下降, N越大, 通带内减小越慢, 也即越平坦。

5. 在 $\Omega > \Omega_c$ ，即在过渡带和阻带内， $|H_a(j\Omega)|^2$ 随着 Ω 的增加而单调下降，下降速度比通带内衰减的速度要快得多。 N 越大，衰减速度越大。
6. 当 $\Omega = \Omega_{st}$ ，即频率为阻带截止频率，衰减为 $\delta_2 = -20\log |H_a(j\Omega_{st})|^2$ ， δ_2 为阻带最小衰减。

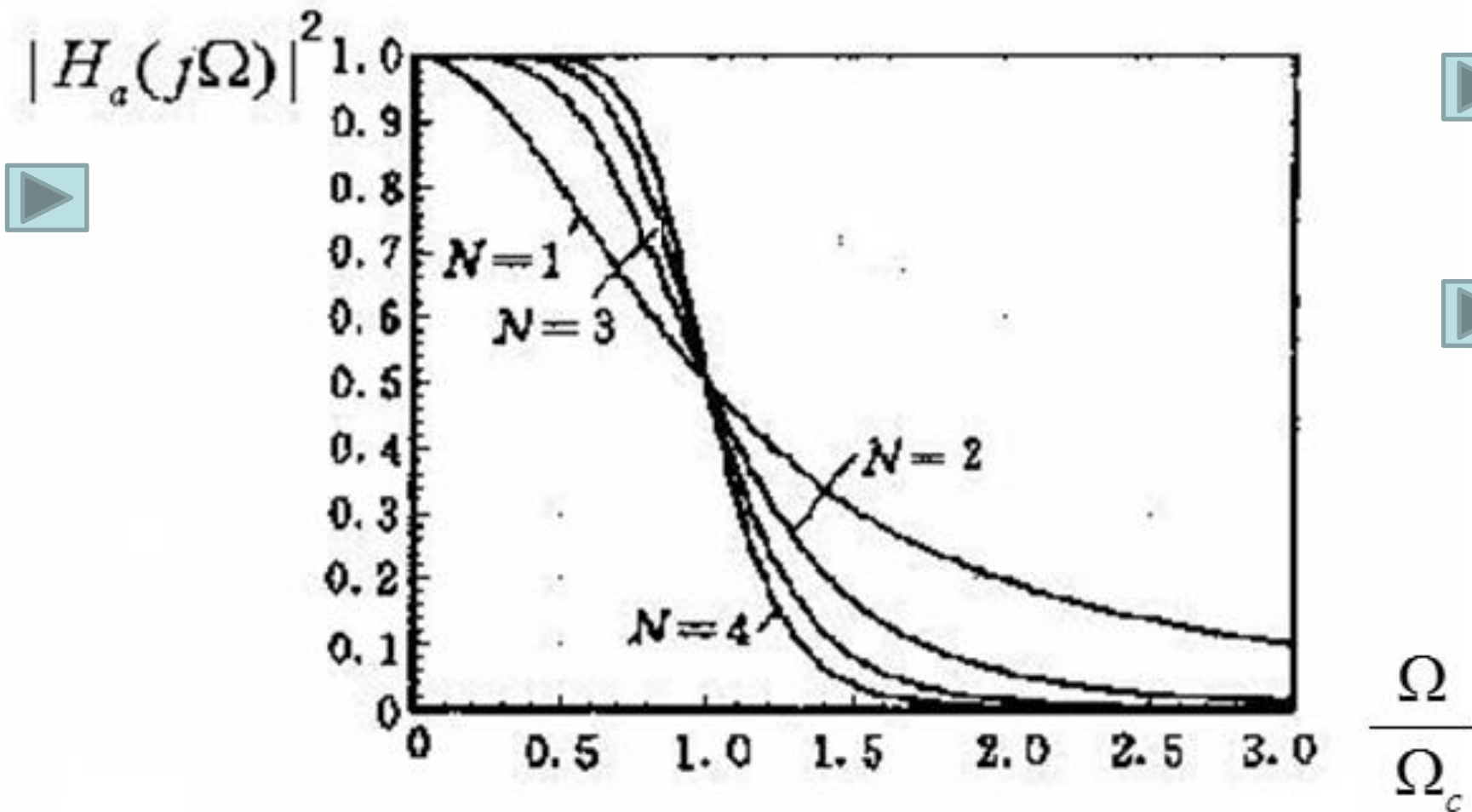


图6-17 巴特沃思低通滤波器幅度特性
及其与阶数 N 的关系

将 $\Omega = \frac{s}{j}$ 代入 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|_{\Omega=s/j}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- 所以，巴特沃思滤波器的零点在 $s = \infty$ ，在有限s平面（ $0 < |s| < \infty$ ）上，只有极点。
- 故，巴特沃思低通滤波器是全极点滤波器。

$H_a(s)H_a(-s)$ 极点为



$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$H_a(s)H_a(-s)$ 极点的特点为

- (1) 极点在 s 平面是象限对称（虚轴对称）的，分布在半径为 Ω_c 的圆（称为巴特沃思圆）上，共 $2N$ 个极点；
- (2) 左半平面极点 $s_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 为 $H_a(s)$ 的极点；
- (3) 极点间的角度间隔为 π / N rad（弧度）；
- (4) 极点不会在虚轴上（滤波器稳定）；
- (5) N 为奇数时，实轴上有极点； N 为偶数时，实轴上没有极点。

例题：

导出三阶巴特沃思滤波器的系统函数， $\Omega_c = 2\text{rad/s}$

解：幅度平方函数为：

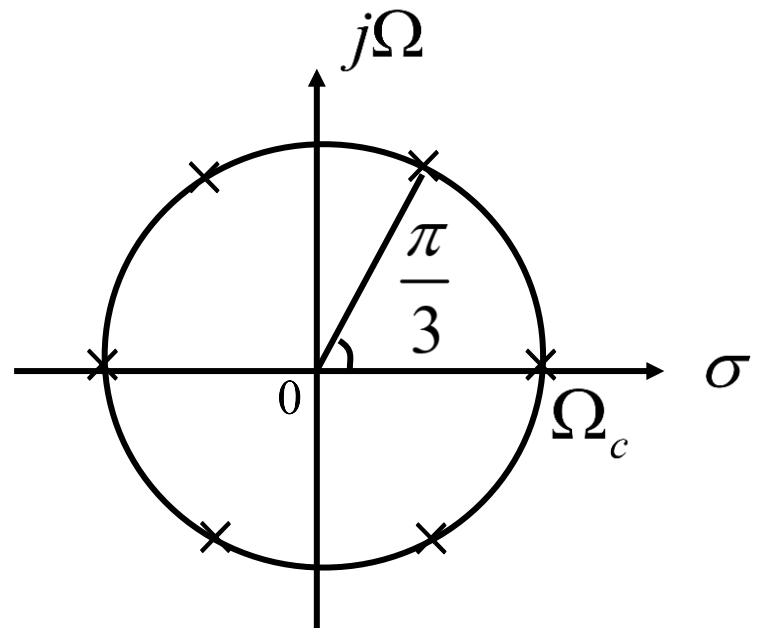
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{2})^6}$$

令： $\Omega^2 = -s^2$ ，则有

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 - \frac{s^6}{2^6}}$$

极点为：

$$s_k = 2e^{j[\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{6}\pi]} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, 6$$



选择左半平面的三个极点（即 **$k=1,2,3$** ）

$$s_1 = 2e^{j\frac{2}{3}\pi} = -1 + j\sqrt{3}, s_2 = 2e^{j\pi} = -2, s_3 = 2e^{j\frac{4}{3}\pi} = -1 - j\sqrt{3}$$

故，得到巴特沃思低通滤波器的系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} = \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$



3、归一化的Butterworth滤波器的系统函数

- 在一般设计中，都先把 Ω_c 设为1rad/s，这样使频率得到归一化。归一化的Butterworth滤波器的极点分布（ P278，表6.3 ）以及相应系数都有现成表可查(P278，表6.2):

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{1 + a_1\bar{s} + a_2\bar{s}^2 + \cdots + a_{N-1}\bar{s}^{N-1} + \bar{s}^N}$$

令 $\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c},$

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + a_1\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + a_2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + \cdots + a_{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^{N-1} + \left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^N}$$

例题：导出三阶巴特沃思滤波器的系统函数， $\Omega_c = 2\text{rad/s}$

归一化（ $\Omega_c = 1$ ）巴特沃斯滤波器分母多项式为

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{1 + a_1\bar{s} + a_2\bar{s}^2 + \cdots + a_{N-1}\bar{s}^{N-1} + \bar{s}^N}$$

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + a_1\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + a_2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + \cdots + a_{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^{N-1} + \left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^N}$$

$$\Omega_c = 2\text{rad/s}$$

例查表法（P278，表6.2）

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{s}{2}\right) + 2\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^3} = \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$



4、Butterworth滤波器设计步骤

1. 根据设计规定, 确定 Ω_c 和 N

2. 由

$$s_k = \Omega_c e^{j[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}]\pi}, k = 1, 2, \dots, 2N$$

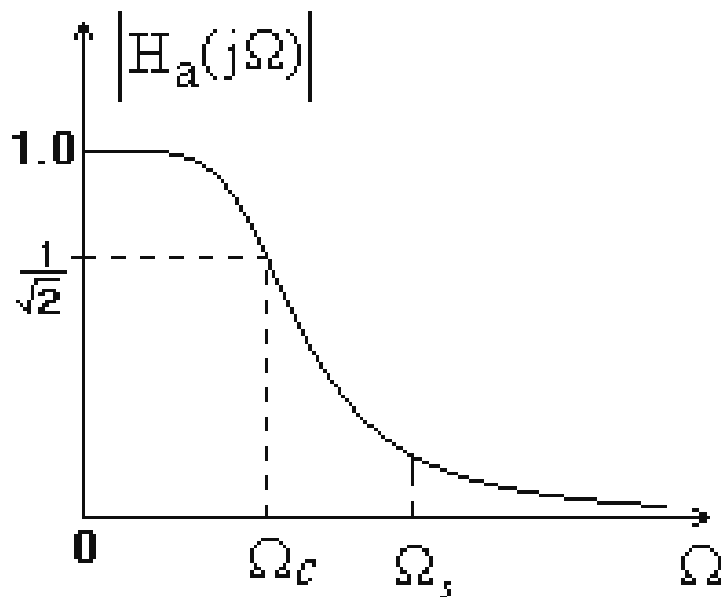
确定 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点。

3. S_k 的 N 个值($k=1, 2, \dots, N$), 即 $\text{Re}(S_k) < 0$ 部分的极点, 构成 $H_a(s)$.

$$H_a(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \text{其中 } \text{Re}[s_k] < 0, k = 1, 2, \dots, N$$

4. 常数 K_0 可由 $H_a(\Omega)$ 和 $H_a(s)$ 的低频或高频特性对比确定。

5、Butterworth滤波器的阶数 N



若在 $\Omega > \Omega_c$ 范围内，
选一个 Ω_s 作为阻带起始频率，
则有

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



Ω 从 $0 \rightarrow \Omega_c$ 范围叫滤波器的通带


Ω 从 $\Omega_c \rightarrow \Omega_s$ 范围叫滤波器的过渡带

Ω 从 $\Omega_s \rightarrow +\infty$ 范围叫滤波器的阻带

(1) 已知 Ω_c 、 Ω_s 和 A_s 求
Butterworth DF 阶数 N

若设计时给定 Ω_c 、 Ω_s 和 $\Omega = \Omega_s$ 处的阻带衰减 A_s

从 $A_s = -10\lg|H_a(j\Omega_s)|^2 = -10\lg \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^{2N}}$



求出
$$N = \frac{\frac{A_s}{10} + 1}{2\lg \frac{\Omega_s}{\Omega_c}}$$



(2) 已知 Ω_c 、 Ω_p 和 $\Omega = \Omega_p$ 的衰减 A_p 求 Butterworth DF 阶数 N

若设计时给定 Ω_c 和 $\Omega = \Omega_p$ 处的通带衰减 A_p , 此时 $A_p \neq -3dB$,

$$\text{从 } A_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2 = -10 \lg \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\text{求出 } N, \quad N = \frac{\frac{A_p}{10} \lg(10^{\frac{A_p}{10}} - 1)}{2 \lg \frac{\Omega_p}{\Omega_c}}$$

(3) 已知 $\Omega = \Omega_p$ 、和 Ω_s 的衰减 A_p 和 A_s
求 Butterworth DF 阶数 N

若设计时给定 Ω_p 、 Ω_s 和衰减 A_p 、 A_s

$$\text{从 } A_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2 = -10 \lg \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{A_p}{10}} - 1, \quad \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{A_s}{10}} - 1, \text{ 对除}$$

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}, \text{ 由此求出 } N = \frac{\lg[(10^{\frac{A_p}{10}} - 1) / (10^{\frac{A_s}{10}} - 1)]}{2 \lg \frac{\Omega_p}{\Omega_s}}$$

例子1

- 试设计一个模拟低通Butterworth滤波器

$\Omega_p = 0.2\pi$, $A_p = 7dB$, $\Omega_s = 0.3\pi$, $A_s = 16dB$, 求阶数N

解:
$$N = \frac{\frac{A_p}{20} / \frac{A_s}{20}}{2 \lg \frac{\Omega_p}{\Omega_s}} = \frac{\lg[(10^{0.7} - 1) / (10^{1.6} - 1)]}{2 \times (-0.176)} = 2.8$$

- 取N=3阶, 根据N=3, 查表得归一化系统函数:

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

去归一化, 先计算 Ω_c ,

$$\text{由 } A_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2 = -10 \lg \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N}}$$

$$\text{推得: } \Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{A_p/10} - 1)^{1/2N}} = 0.1587\pi$$

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{(0.1587\pi)^3}{(0.1587\pi)^3 + 2 \cdot (0.1587\pi)^2 s + 2 \cdot (0.1587\pi)s + (0.1587\pi s)^3} \\ &= \frac{0.004}{0.004 + 0.4971s + 0.9971s^2 + 0.004s^3} \end{aligned}$$

例子2

- 设低通DF的3dB带宽频率 $\omega_c=0.2\pi$,阻带频率 $\omega_s=0.4\pi$,在 $\omega = \omega_s$ 处的止带衰减 $20\lg|H(e^{j\omega_s})|=-15\text{dB}$,试用脉冲响应不变法（冲激不变法）设计一个Butterworth低通DF。（设采样频率 $f_s=20\text{kHz}$ ）

解：设计分为4步。

- （1）将数字滤波器的设计指标转变为模拟滤波器的设计指标。因为： $f_s=20\text{kHz}$,则采样间隔为 $T=1/f_s=1/20\text{kHz}$

- 对于冲激响应不变法，频率变换是线性的。

模拟滤波器的通带和止带截止频率为：

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{0.2\pi}{\frac{1}{20 \times 10^3}} = 4\pi \times 10^3$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.4\pi}{\frac{1}{20 \times 10^3}} = 8\pi \times 10^3$$

$$\text{令 } 20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = 20 \lg |H_a(j\Omega_s)| = -15 \text{ dB}$$

这样要设计模拟低通滤波器

3dB带宽频率 $\Omega_c = 4\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$

止带截止频率为 $\Omega_s = 8\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$ ，且 $A_s = -15 \text{ dB}$

(2)设计 $H_a(s)$

将上述设计指标代入 求出 N 阶数



$$N = \frac{\lg \left[10^{\frac{-20 \lg |H_a(j\Omega_s)|}{10}} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)} = \frac{\lg \left[10^{\frac{15}{10}} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{8\pi}{4\pi} \right)} = 2.468$$

取 $N = 3$,

此时, $\Omega = \Omega_s$ 处的衰减比 $-15dB$ 还小
更满足设计指标。

查表, 得归一化系统函数;

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

去归一化 $\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c}$ 代入得

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3}$$

将其进行因式分解求各极点

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{i=0}^{N-1} (s - s_i)}$$

其中 $s_i = \Omega_c e^{j[\frac{\pi}{N}(i+\frac{1}{2})+\frac{\pi}{2}]}$, $i = 0, 1, 2, N = 3$

$$s_0 = \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}, s_1 = \Omega_c e^{j\pi} = -\Omega_c, s_2 = \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\therefore H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$



$$H_a(s) = \frac{C_0}{s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}} + \frac{C_1}{s + \Omega_c} + \frac{C_2}{s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}}$$

求出： $C_0 = \frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}, C_1 = \Omega_c, C_2 = \frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$

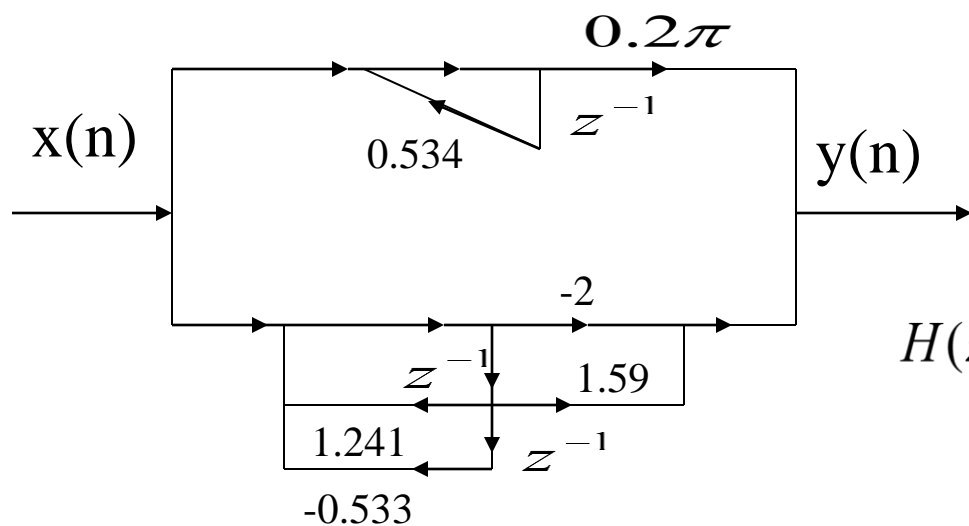
已知 $H_a(s)$,由冲激不变法,求DF的 $H(z)$

即用 $\frac{A_k}{s-s_k} \rightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k T} z^{-1}}$,可得:

$$H(z) = T \left[\frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c T e^{j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}} + \frac{\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} + \frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c T e^{-j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}} \right]$$

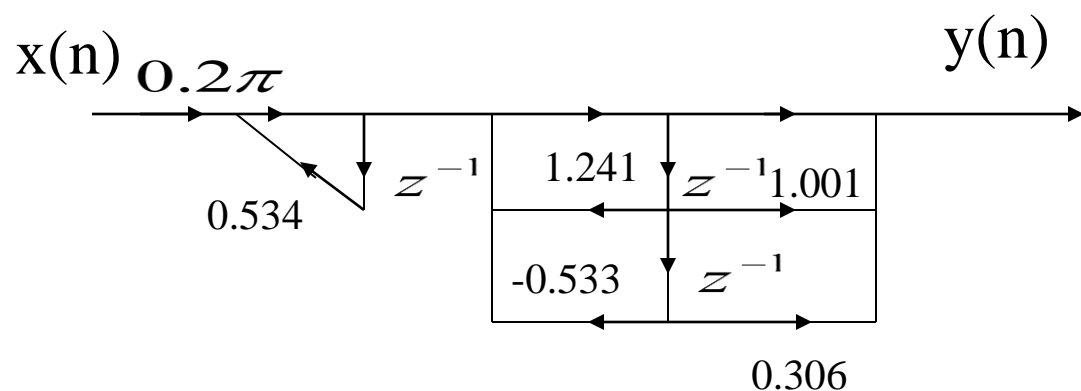
将 $\Omega_c = 4\pi \times 10^3$ 和 $T = \frac{1}{20 \times 10^3}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} + \frac{-2 + 1.59z^{-1}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}} \\ &= 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}} \end{aligned}$$



并联型

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} + \frac{-2 + 1.59z^{-1}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$



级联型

$$H(z) = 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$

例子3

试用双线性变换法设计Butterworth低通DF。
已知低通DF的3dB带宽频率 $\omega_c = 0.2\pi$ ，止带
起始频率 $\omega_s = 0.4\pi$ ，在 $\omega = \omega_s$ 处的止带衰减：

$$20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = -15 \text{dB}$$

解：（1）将DF的设计指标转换为模拟滤波器的设计指标。

对双线性变换法 $\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2}$

根据3dB带宽频率 $\omega_c = 0.2\pi$

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} 0.1\pi = \frac{2}{T} \times 0.3249$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} 0.2\pi = \frac{2}{T} \times 0.7265$$

(2) 设计 $H_a(s)$, 其中 $20\lg|H(e^{j\omega_s})| = -15\text{dB} = 20\lg|H_a(j\Omega_s)|$

$$N = \frac{\lg \left[10^{\frac{-20\lg|H_a(j\Omega_s)|}{10}} - 1 \right]}{2\lg \frac{\Omega_s}{\Omega_c}} = \frac{\lg [10^{1.5} - 1]}{2 \times 0.34949} = 2.126$$

取 $N = 3$, 根据 $N = 3$, 查表

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 1}$$

(3) 由 $H_a(s)$ 求 $H_a(z)$.

$$\text{其中 } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\text{求出 } \frac{s}{\Omega_c} = \frac{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{\frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)} = \frac{1 - z^{-1}}{0.3249(1 + z^{-1})}$$

代入, 有

$$H(z) = \frac{0.03249z^3 + 0.09747z^2 + 0.09747z + 0.03249}{1.8933z^3 - 3.34123z^2 + 2.04163z - 0.52881}$$

三、切贝雪夫 (Chebyshev) 低通滤波器

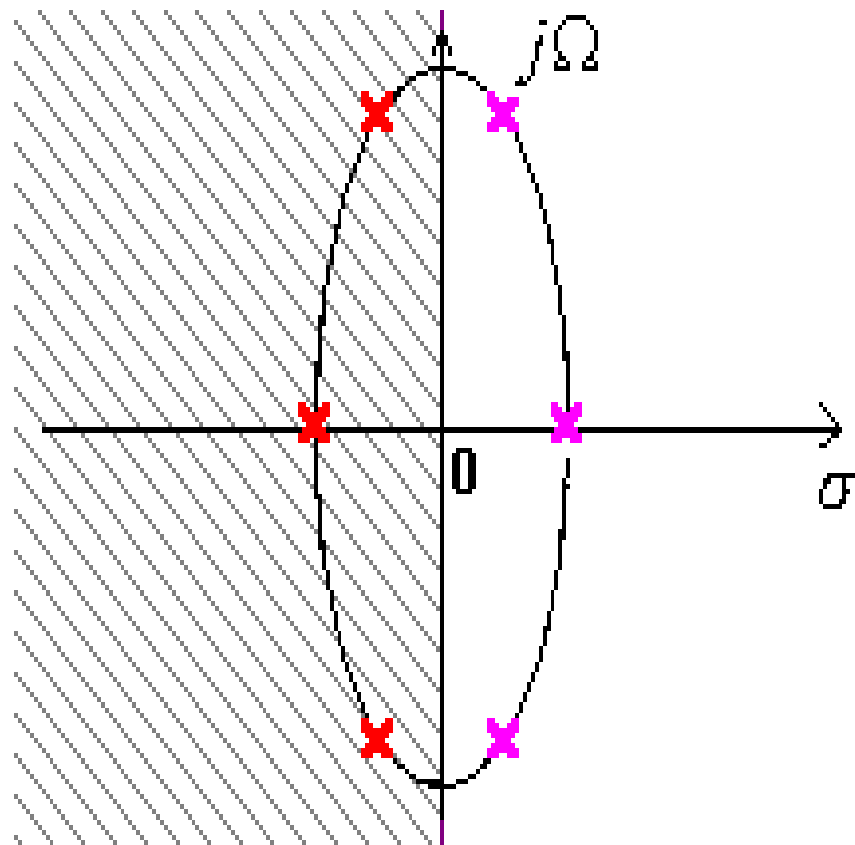
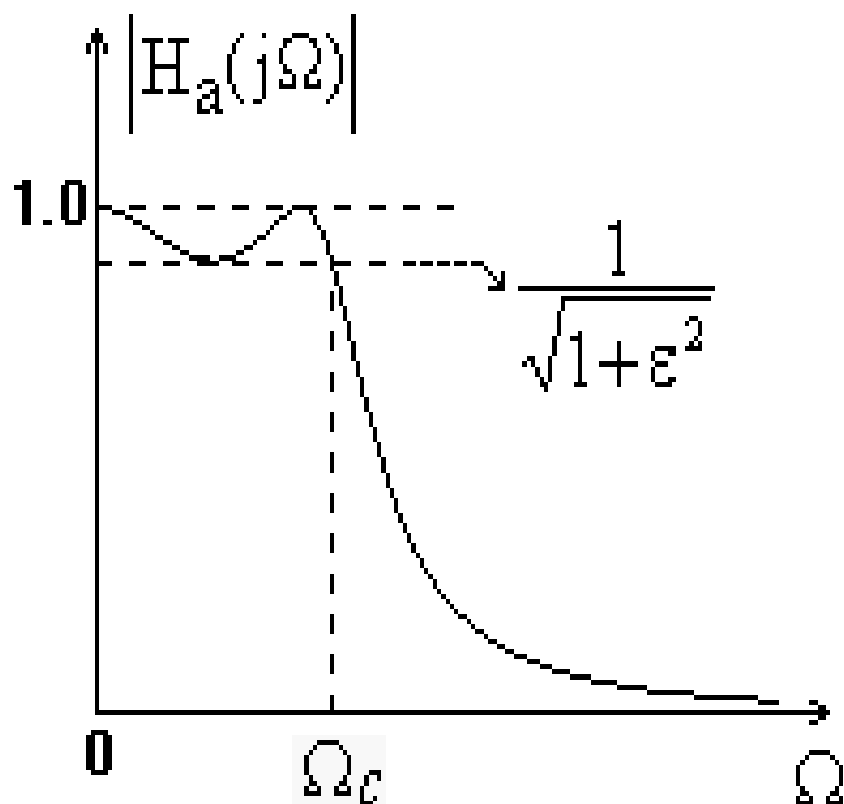
1、引入原因

- 巴特沃思的频率特性在通带和阻带都是随频率而单调下降，在实际应用中，不经济。因为，在通带边缘满足要求，则在通带内会有较大富裕，超出指标要求（即求出的 N 比较大）。
- 更有效的方法是将指标要求均匀地分布在通带内、阻带内或者通带和阻带内，这样，设计出的滤波器的阶数较低，因而成本较低。
- 这种均匀分布的方法可以通过选择具有等波纹特性的逼近函数来实现。

2、切比雪夫滤波器类型

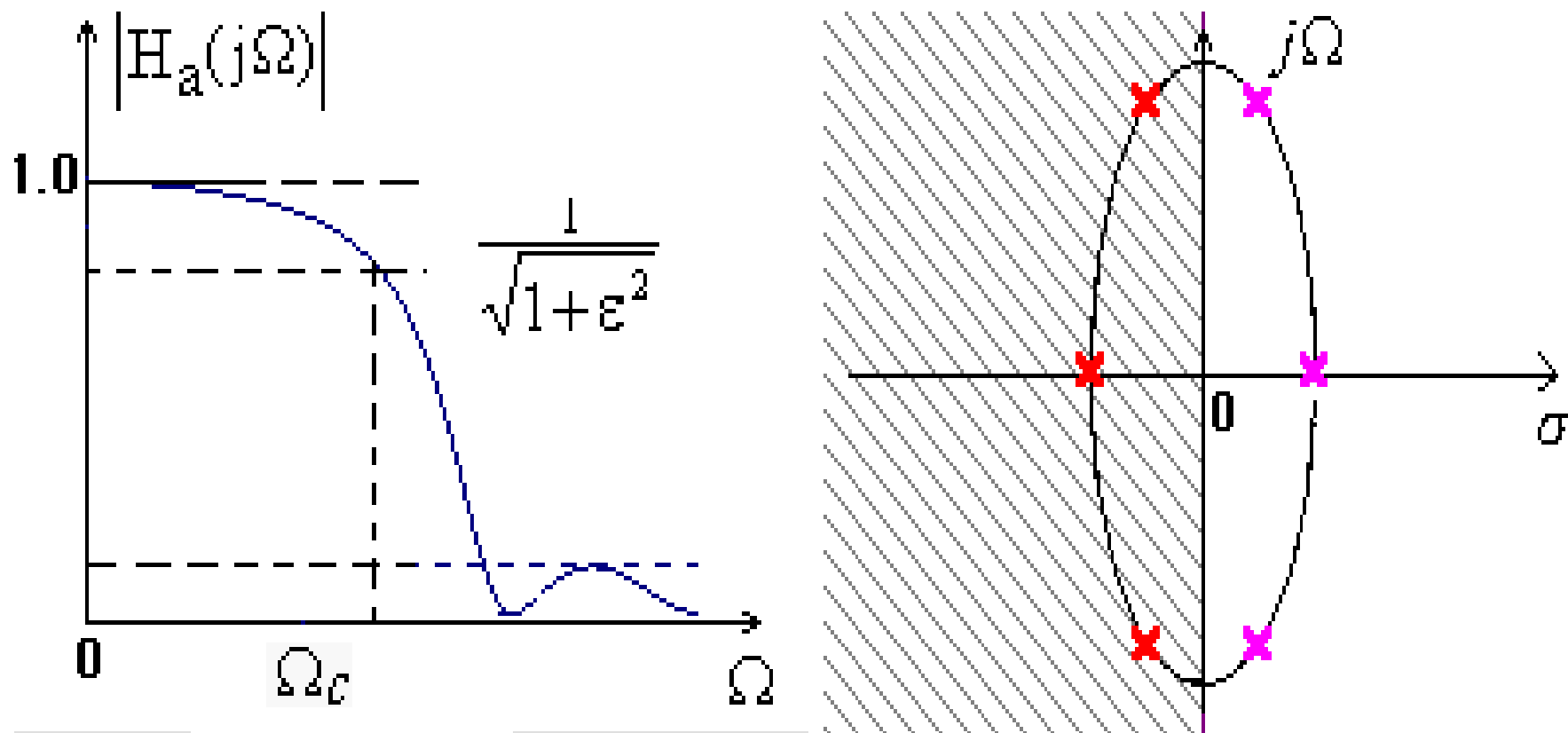
- 切比雪夫滤波器就是将指标要求均匀地分布在通带内或者阻带内，在通带内或者阻带内具有等波纹特性滤波器。
- 两种切比雪夫滤波器：
 - 切比雪夫I型：通带等波纹，阻带单调下降
 - 切比雪夫II型：通带单调下降，阻带等波纹

Chebyshev I型幅频特性和零极点图 (N=3)



N=3 Chebyshev I型，下面我们仅讲此类
型

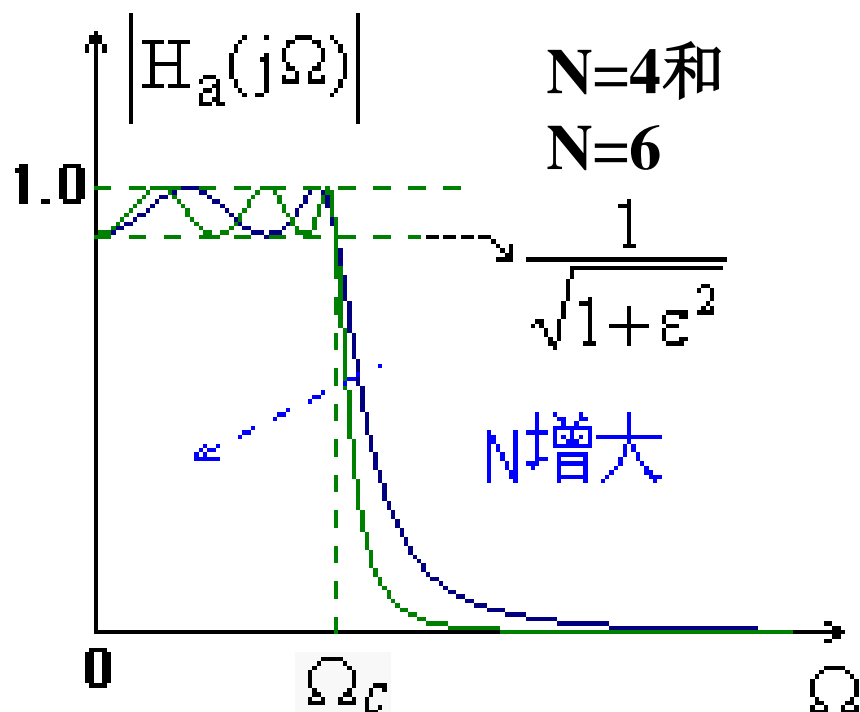
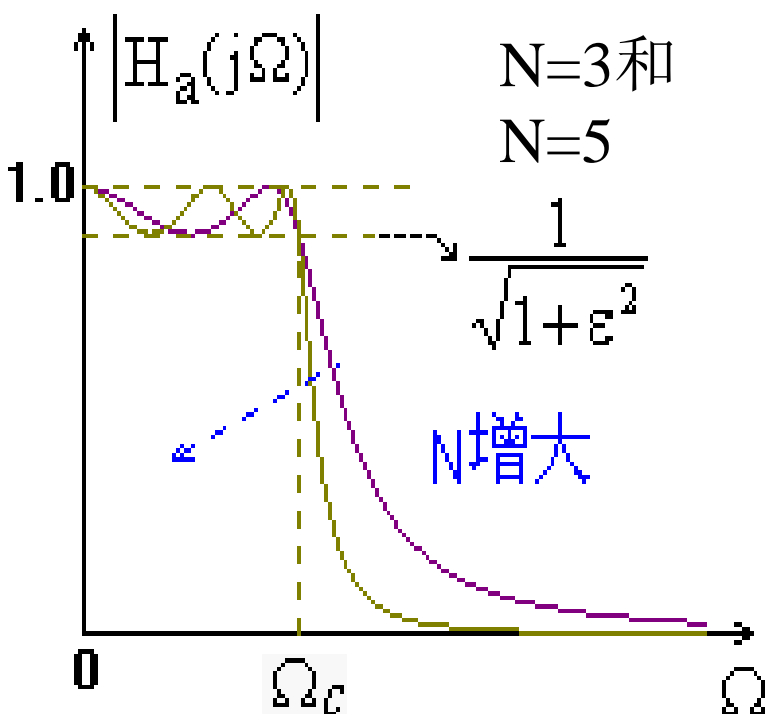
Chebyshev II型幅频特性和零极点图 (N=3)



N=3 Chebyshev II型，其设计思想同 Chebyshev I型，在此课程中我们就不作介绍。⁶⁰



Chebyshev I型, II型, 当N为奇数、偶数时, 其幅频特性各不相同。

如: Chebyshev I型当N为奇数、偶数的幅频特性



3、切比雪夫滤波器幅频特性

- 切比雪夫I型滤波器的幅度平方函数


$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 c_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$


- 式中， N 为滤波器的阶数， Ω_c 为截止频率，也是滤波器在某一衰减分贝处的通带宽度。（注意： Ω_c 不一定是3dB的带宽）。
- ε 是小于1的正数，表示通带波纹大小的一个参数， ε 越大，波纹也越大。

$C_N(x)$ 是切贝雪夫多项式, 定义为:

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ ch(N ch^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases}$$

- 切贝雪夫多项式

$$N = 0, \quad C_0(x) = 1$$

$$N = 1, \quad C_1(x) = x$$

$$N = 2, \quad C_2(x) = 2x^2 - 1$$

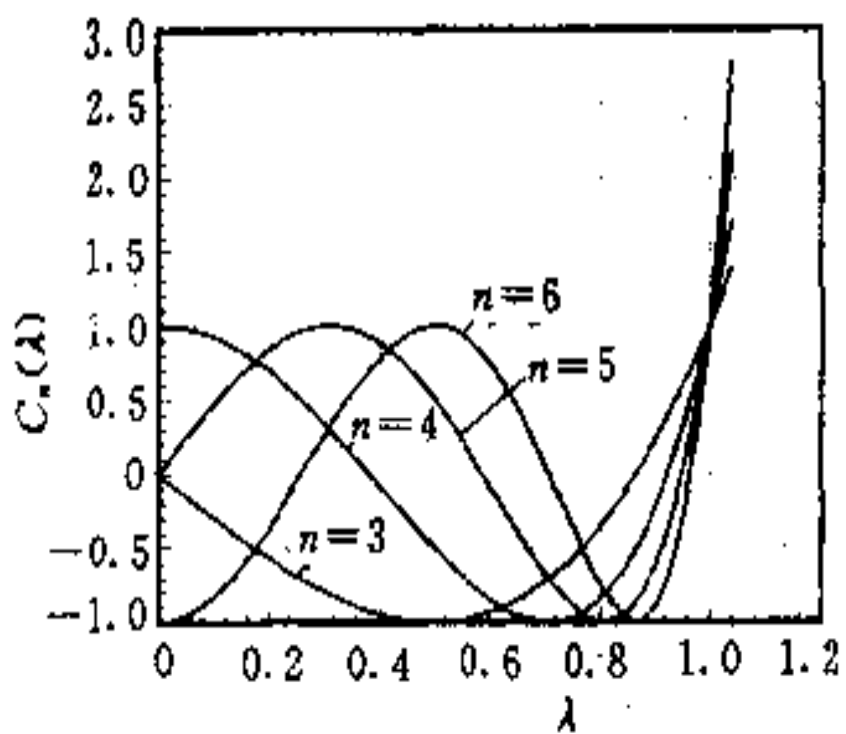
$$N = 4, \quad C_4(x) = 4x^3 - 3x$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{双曲余弦函数}$$

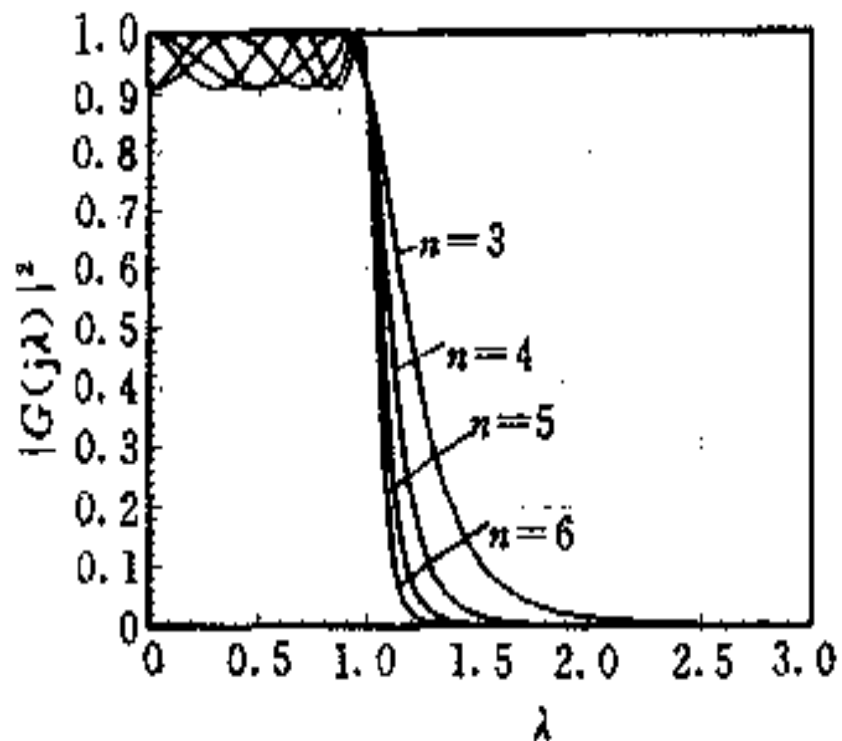


- 切贝雪夫多项式的递推公式 ($N \geq 1$)

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x)$$



(a)



(b)

图 7.2.3 切比雪夫滤波器 $\lambda = \Omega / \Omega_c$

(a) 切比雪夫函数

(b) 切比雪夫滤波器幅频特性

切贝雪夫滤波器的幅度函数为：

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}}$$

其特点为：

1. 当 $\Omega = 0$ 时， N 为偶数时， $H_a(j0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ ，
当 N 为奇数时， $H_a(j0) = 1$ 。

2. 当 $\Omega = \Omega_c$ 时， $H_a(j\Omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ ，



即所有幅度函数曲线都通过 $\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$

故将 $\Omega = \Omega_c$ 定义为切贝雪夫滤波器的截止频率。

在这个频率点，幅度函数不一定是3dB。

$\because 0 < \varepsilon < 1, \therefore \Omega_c$ 一定小于3dB带宽时的截止频率

3. 在通带内，即当 $\Omega < \Omega_c$ 时， $|H_a(j\Omega)|$ 在 $1 \sim \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ 之间等波纹起伏。



4. 在通带之外，即当 $\Omega > \Omega_c$ 时， $|H_a(j\Omega)|$ 随着 Ω 的增加而迅速单调趋于零。

5. 切贝雪夫滤波器由三个参数 ε, Ω_c, N 确定

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}}$$

4、确定通带内波纹值 ε

Chebyshev滤波器有三个参数： ε 、 Ω_c 和N， Ω_c 是通带宽度， ε 是通带波纹，定义为：

$$\delta_1 = 10 \log_{10} \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}^2}{|H_a(j\Omega)|_{\min}^2} = 20 \log_{10} \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega)|_{\min}} (dB)$$

$$\because |H_a(j\Omega)|_{\max} = 1, |H_a(j\Omega)|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$\therefore \delta_1 = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1$$

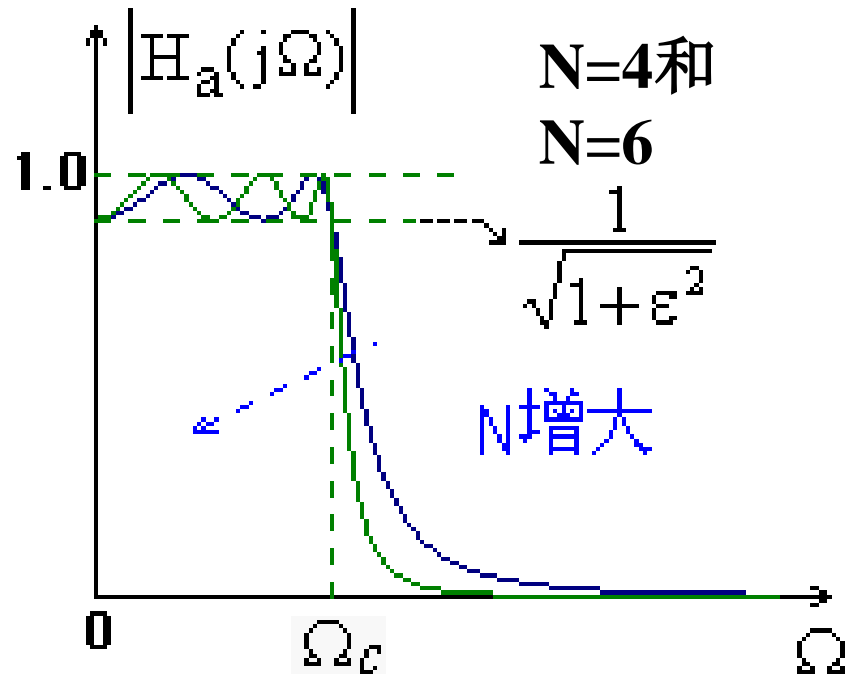
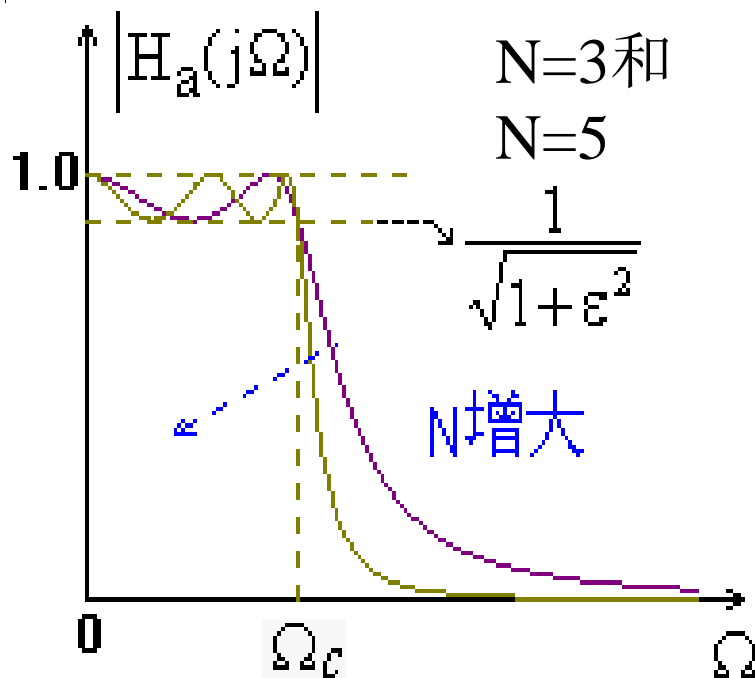
5、确定阶数N (1) N阶特性

阶数N等于通带内最大和最小值个数的总和。

可由幅频特性中看出N阶数。且当：

N=奇数，则 $|H_a(j\Omega)|$ 在 $\Omega=0$ 处有一最大值，

N=偶数，则 $|H_a(j\Omega)|$ 在 $\Omega=0$ 处有一最小值。



(2) N阶公式

由止带起始点 Ω_s 处的关系→求出Chebyshev的阶数

$$\left|H_a(\Omega_s)\right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)} \Rightarrow C_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\left|H_a(\Omega_s)\right|^2} - 1}$$

$$\because \frac{\Omega_s}{\Omega_c} > 1 \therefore C_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right) = ch\left[Nch^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\left|H_a(\Omega_s)\right|^2} - 1}$$

$$\therefore N = \frac{ch^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\left|H_a(\Omega_s)\right|^2} - 1}\right]}{ch^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)}$$

6、求滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 的极点

$$\left| H_a(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \bigg|_{j\Omega=s} = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{令: } 1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) &= 0 \rightarrow C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \\ &\rightarrow C_N\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\text{因为在通带内: } \cos\left[N \cos^{-1}\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)\right] = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

根据欧拉公式：

$$\cos j\beta = \frac{e^{-\beta} + e^{\beta}}{2} = ch\beta, \quad \text{双曲余弦}$$

$$\sin j\beta = \frac{e^{-\beta} - e^{\beta}}{2j} = j \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} = jsh\beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{令 } \cos^{-1}\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = \alpha + j\beta \Rightarrow \frac{s}{j\Omega_c} = \cos(\alpha + j\beta) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \cos N(\alpha + j\beta) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\cos N(\alpha + j\beta) = \cos N\alpha chN\beta - j \sin N\alpha shN\beta$$

$$\therefore \cos N\alpha chN\beta - j \sin N\alpha shN\beta = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

实部和实部相等,虚部和虚部相等,由此得出:

$$\cos(N\alpha)ch(N\beta) = 0$$

$$\sin(N\alpha)sh(N\beta) = \mp \frac{1}{\varepsilon}$$

因 $ch(N\beta) \neq 0$,可以解出 $\cos(N\alpha) = 0$

$$\text{则有: } \alpha = \frac{2k-1}{N} \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$$\Rightarrow \sin N\alpha = \pm 1, \text{解得: } sh(N\beta) = \mp \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{N} sh^{-1}\left(\mp \frac{1}{\varepsilon}\right) = \mp \frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{由} \frac{s}{j\Omega_c} = \cos(\alpha + j\beta) \Rightarrow s = \Omega_c \cdot \sin \alpha \cdot \text{sh} \beta + j\Omega_c \cdot \cos \alpha \cdot \text{ch} \beta,$$

把解得极点 α 和 β 代入, 得到极点:

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k = \mp \Omega_c \sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \bullet \text{sh}\left(\frac{1}{N} \text{sh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ + j\Omega_c \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \bullet \text{ch}\left(\frac{1}{N} \text{sh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), k=1, 2, \dots, 2N$$

$$\text{即: } \sigma_k = \mp \Omega_c a \cdot \sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), k=1, 2, \dots, 2N$$

$$\Omega_k = \Omega_c b \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), k=1, 2, \dots, 2N$$

$$\text{其中: } a = \text{sh}\left(\frac{1}{N} \text{sh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad b = \text{ch}\left(\frac{1}{N} \text{sh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

则可得：

$$\left[\frac{\sigma_k}{\Omega_c a} \right]^2 + \left[\frac{\Omega_k}{\Omega_c b} \right]^2 = 1$$

\Downarrow \Downarrow
短轴 长轴

Chebyshev I 型滤波器的极点，是一组分布在以 $b\Omega_c$ 为长轴（在虚轴上），以 $a\Omega_c$ 为短轴（在实轴上）的椭圆上的点。

7、Chebyshev I型滤波器的归一化系统函数

$$H_a(s) = \frac{d}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} = \frac{d}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + a_{N-2}s^{N-2} + \cdots + a_1s + a_0}$$

式中，d为归一化系数。

若N=奇数时，当s=0时，即 $\Omega=0$ 时：

$$H_a(0) = \frac{d}{a_0} = 1, d = a_0$$

若N=偶数时，当s=0时，即 $\Omega=0$ 时：

$$H_a(0) = \frac{d}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, d = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$\text{设 } \bar{s} = \frac{s}{\Omega_c}$$

则归一化后的Chebyshev滤波器系统函数为

$$H_a(\bar{s}) = H(s) \Big|_{s=\Omega_c \bar{s}}$$

$$= \frac{d_N}{\bar{s}^N + a_{N-1}\bar{s}^{N-1} + a_{N-2}\bar{s}^{N-2} + \cdots + a_1\bar{s} + a_0}$$

式中： $d_N = \begin{cases} a_0 & (N \text{ 为奇数}) \\ \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & (N \text{ 为偶数}) \end{cases}$

以上 a_{N-1}, \cdots, a_0 有表可查($p279/280$)

8、Chebyshev DF设计步骤

- ① 首先要先确定 ε ， N 和 Ω_c 。
- ② 计算 a 、 b 。
- ③ 确定 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点。
- ④ 取 $\text{Re}(S_i) < 0$ 的极点，得到 $H_a(s)$ 。

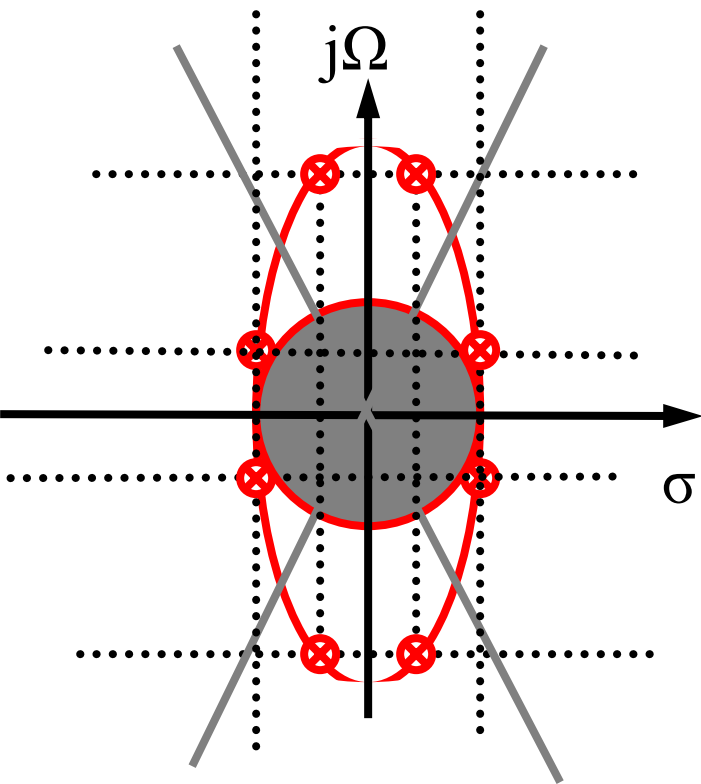
$$H_a(s) = \frac{d}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)}$$

- d 可由 $A(\Omega)$ 和 $H_a(s)$ 低频或高频特性对比确定。

例1

- 设 $N=4$ ，确定Chebyshev I型，极点位置。

解： $N=4$ ，则有8个极点，我们要求在 S 左半平面上为稳定系统的四个极点。



根据 $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$,

其中 $k = 1 \cdots 8, N = 4, i = 1, 2, 3, 4$

$$\sigma_i = \mp \Omega_c a \cdot \sin \frac{(2i-1)\pi}{2N}$$

$$\Omega_i = \Omega_c b \cdot \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N}$$

由 $N = 4$ ，代入上述方程中，
求出左半平面的4个极点。

由上可知，在左半平面上：

第1极点：

$$\sigma_1 = -\Omega_c a \sin \frac{\pi}{2N} = -\Omega_c a \sin 22.5^\circ, \Omega_1 = \Omega_c b \cos 22.5^\circ$$

第2极点：

$$\sigma_2 = -\Omega_c a \sin \frac{3\pi}{2N} = -\Omega_c a \sin 67.5^\circ, \Omega_2 = \Omega_c b \cos 67.5^\circ$$

第3极点：

$$\sigma_3 = -\Omega_c a \sin \frac{5\pi}{2N} = -\Omega_c a \sin 112.5^\circ, \Omega_3 = \Omega_c b \cos 112.5^\circ$$

第4极点：

$$\sigma_4 = -\Omega_c a \sin \frac{7\pi}{2N} = -\Omega_c a \sin 157.5^\circ, \Omega_4 = \Omega_c b \cos 157.5^\circ$$

由上图可知，确定Chebyshev I型滤波器极点在椭圆上的位置办法：

(1)先求出大园(半径为 $b\Omega_c$)和小园半径 $a\Omega_c$ 。

$$a\Omega_c = \Omega_c sh\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$
$$b\Omega_c = \Omega_c ch\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

(2)等间隔角 $\frac{\pi}{N}$ 均分，各点是虚轴对称的，且一定不落在虚轴上， N 为奇数时，有落在实轴上的点； N 为偶数时，实轴上也没有。

(3)幅度平方函数的极点(在椭圆上)的位置确定：

其垂直坐标由落在大园上的各等间隔点规定；其水平坐标由落在小园上的各等间隔点规定

例2

试导出2阶Chebyshev I型DF 系统函数(已知通带波纹为 $\delta = 1dB$ 归一化频率为 $\Omega_c = 1rad/s$.)

解: 由于 $\delta = 1dB$, $\varepsilon^2 = 10^{\frac{\delta}{10}} - 1 = 0.25892541$

又 $\because \Omega_c = 1$, 则 $x = \frac{\Omega}{\Omega_c} = \Omega$, 代入

$C_1(\Omega) = \Omega$, $C_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$ 及 ε^2

$$\therefore A^2(\Omega) = |H_a^2(j\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_2^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (4\Omega^4 - 4\Omega^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{1.0357016\Omega^4 - 1.0357016\Omega^2 + 1.25892541}$$



令 $s = j\Omega$, 即 $s^2 = -\Omega^2$ 可得

$$H_a(s)H_a(-s) = A^2(\Omega) \Big|_{\Omega^2 = -s^2}$$
$$= \frac{1}{1.0357016s^4 + 1.0357016s^2 + 1.25892541}$$

从分母多项式的根求出 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点

$$s_1 = 1.0500049e^{j58.484569^\circ}, s_2 = 1.0500049e^{j121.51543^\circ},$$
$$s_3 = 1.0500049e^{-j58.484569^\circ}, s_4 = 1.0500049e^{-j121.51543^\circ}$$

系统稳定左半平面(s_2, s_4), $\because N = 2$ 为偶数,

$$k = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = \frac{1.1025103}{\sqrt{10^{0.1}}} = 0.9826135$$

$$H_a(s) = \frac{0.9826135}{s^2 + 1.0977343s + 1.1025103}$$

(查表P279 / 280, $\delta = 1dB$ 波纹)

- 在相同的幅度特性要求下，切贝雪夫滤波器的阶数比巴特沃思滤波器的阶数要少。

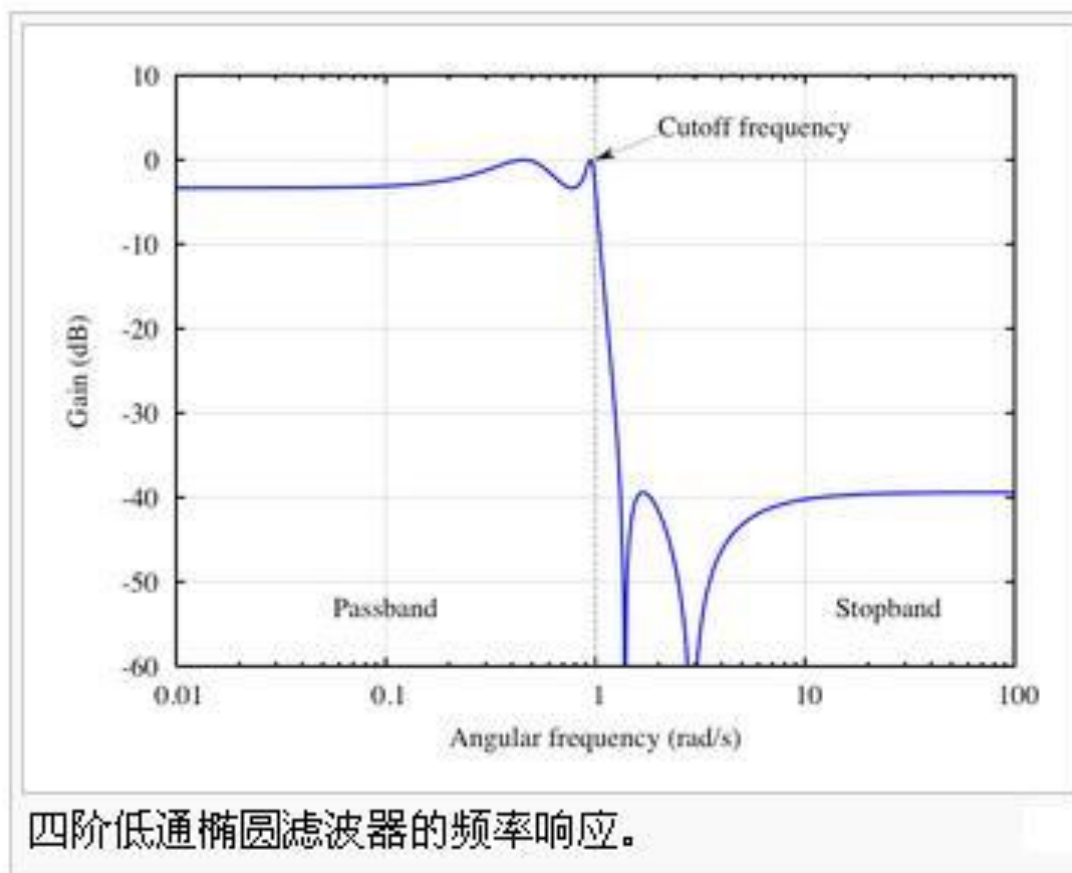
四、椭圆滤波器

- 椭圆滤波器（**Elliptic filter**）又称考尔滤波器（**Cauer filter**），是在**通带**和**阻带**等波纹的一种滤波器。椭圆滤波器相比其他类型的滤波器，在阶数相同的条件下有着最小的通带和阻带波动。它在通带和阻带都是等波纹的，这一点区别于在通带和阻带都平坦的巴特沃斯滤波器，以及通带平坦、阻带等波纹或是阻带平坦、通带等波纹的切比雪夫滤波器。

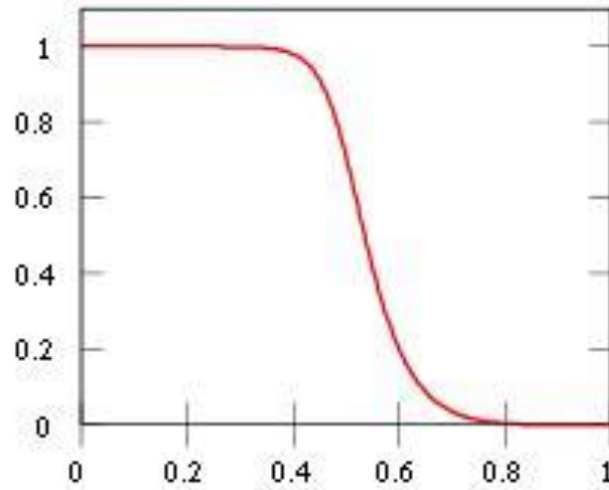
一个低通椭圆滤波器的幅度频率响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 J_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

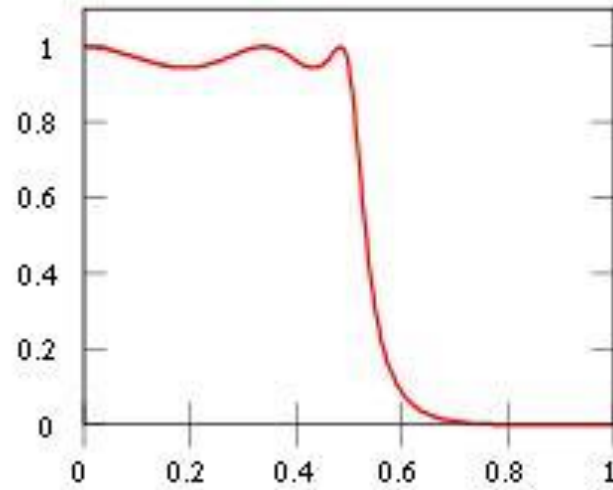
其中， $J_N^2(\bullet)$ 是N阶雅克比椭圆函数



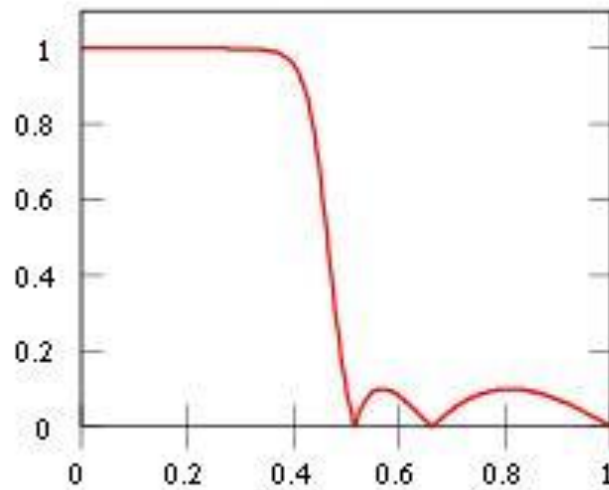
Butterworth



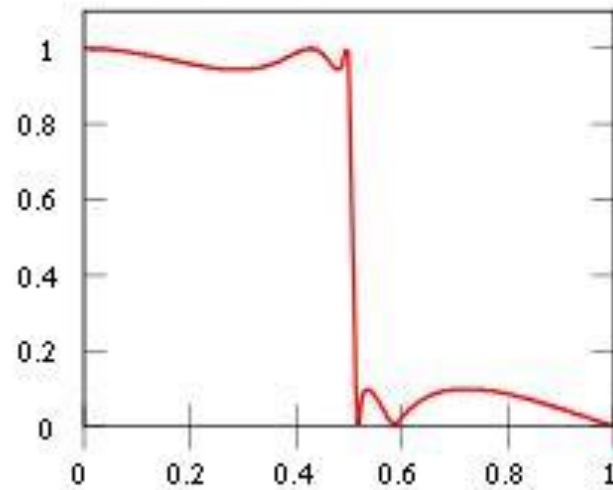
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic



椭圆滤波器比其他滤波器更陡，因此在选择滤波器的时候，椭圆滤波器能够以较低的阶数获得较窄的过渡带宽，但是它在通带和阻带上都有波动。

五、四种模拟滤波器比较

- 巴特沃思、切贝雪夫I、II型、椭圆型；

① 幅度特性比较：

- 巴特沃思：全频段具有单调下降的幅度特性；
- 切贝雪夫I型：通带等波纹，阻带单调下降；
- 切贝雪夫II型：通带单调下降，阻带等波纹；
- 椭圆型：通带、阻带均等波纹；

② 过渡带宽比较：当阶次 N 、通带最大衰减、阻带最大衰减、通带截止频率相同时

- 巴特沃思过渡带宽最宽，切贝雪夫I、II型次之，椭圆型最窄；

五、四种模拟滤波器比较

- ③ 阶次 N 比较：若滤波器具有相同的幅度特性指标
 - 巴特沃思阶次最大，切贝雪夫I、II型次之，椭圆型最小；
- ④ 参数量化灵敏度比较：越低越好
 - 巴特沃思最低，切贝雪夫I、II型次之，椭圆型最高；
- ⑤ 相位响应比较：
 - 巴特沃思较好，在部分通带中有线性相位，切贝雪夫I、II型次之，椭圆型最差，都是非线性相位。