

第六章

无限长单位冲激响应 (IIR) 数字滤波器的设计方法

本章内容（10节）

- 6.1 数字滤波器基本概念
- 6.2 最小相位延时系统
- 6.3 全通系统
- 6.4 用模拟滤波器设计数字滤波器
- 6.5 冲激响应不变法
- 6.6 双线性变换法



- 6.7 设计IIR滤波器的频率变换法**
- 6.8 先利用模拟域频带变换法，再利用数字化法设计数字各型滤波器**
- 6.9 先将模拟归一化低通原型化为数字低通，再利用数字域频带变换法设计数字各型滤波器**
- 6.10 数字滤波器的实现**



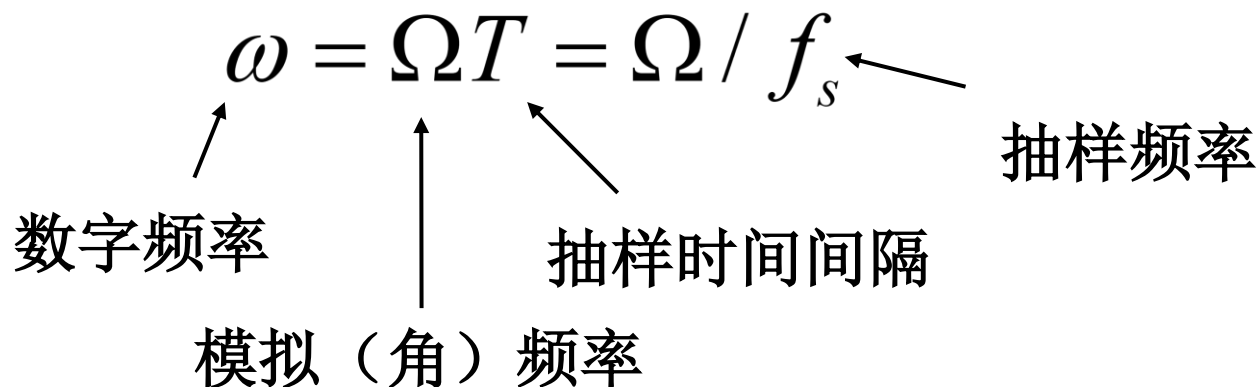
6.1 数字滤波器基本概念


- 数字系统、线性移不变离散时间系统、数字滤波器三个名称，同一个意思；
- 数字滤波器设计有模拟滤波器设计和数字滤波器设计
 - 模拟滤波器设计：采用模拟设计方法
 - 数字滤波器设计：采用数字设计方法

- 数字滤波器类型（和模拟滤波器一样）
 - 低通（**Low pass, LP**）滤波器
 - 高通（**High pass, HP**）滤波器
 - 带通（**Band pass, BP**）滤波器
 - 带阻（**Band stop, BS**）滤波器
 - 全通（**All pass, AP**）滤波器
- 数字滤波器，其频率变量采用数字频率 ω

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s$$

数字频率 模拟（角）频率 抽样时间间隔 抽样频率



- 数字系统的频率响应范围为 $(0, 2\pi)$;
- 数字频率对应的实际模拟频率是多少? 
- 在数字滤波器设计中, 必须给出采样频率。

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi f_s T = 2\pi \frac{f_s}{f_s} = 2\pi$$

式中, $\omega_s \rightarrow$ 数字域抽样频率 (即 2π)

$\frac{\omega_s}{2} \rightarrow$ 折叠频率

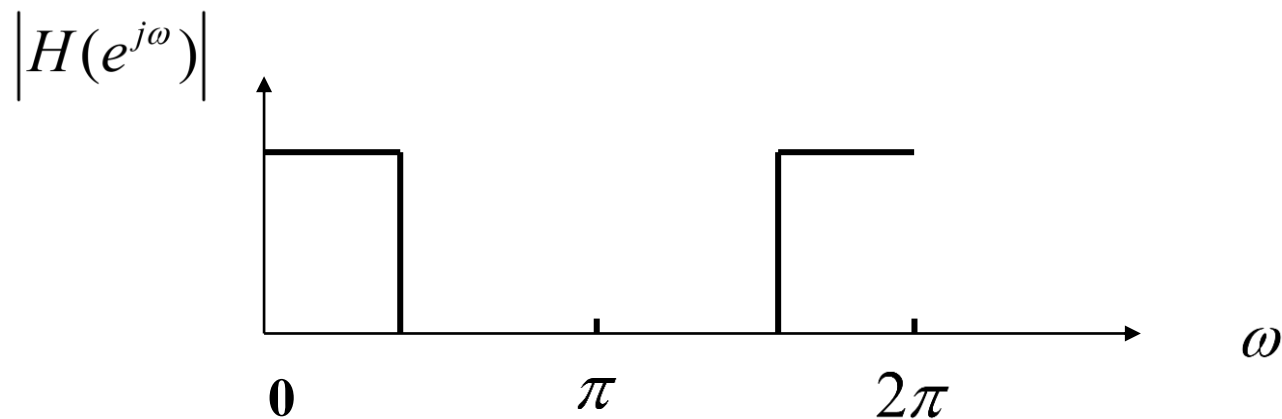
按照抽样定理, 实际频率只能在以下范围

$$\omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \pi \qquad f \leq \frac{f_s}{2}$$

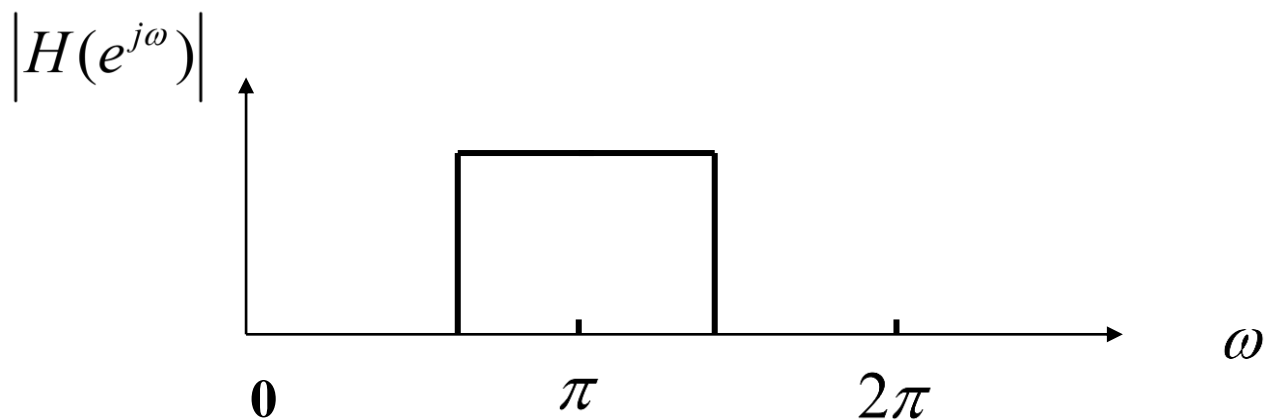
数字滤波器系统函数 $H(z)$

数字滤波器幅度频率响应 $|H(e^{j\omega})|$

(a) 低通

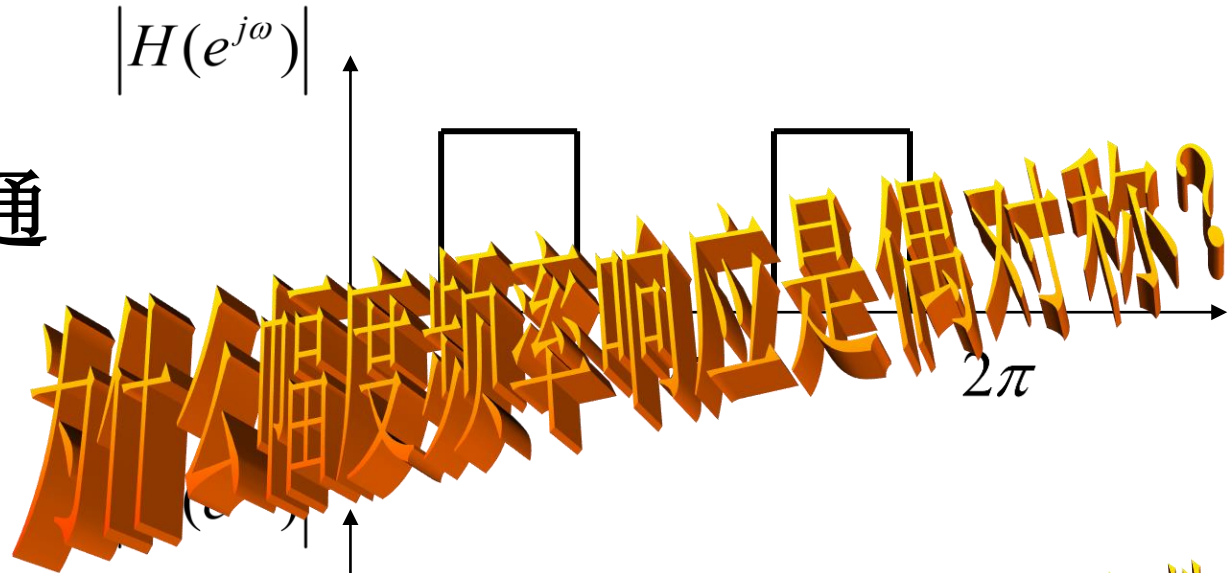


(b) 高通

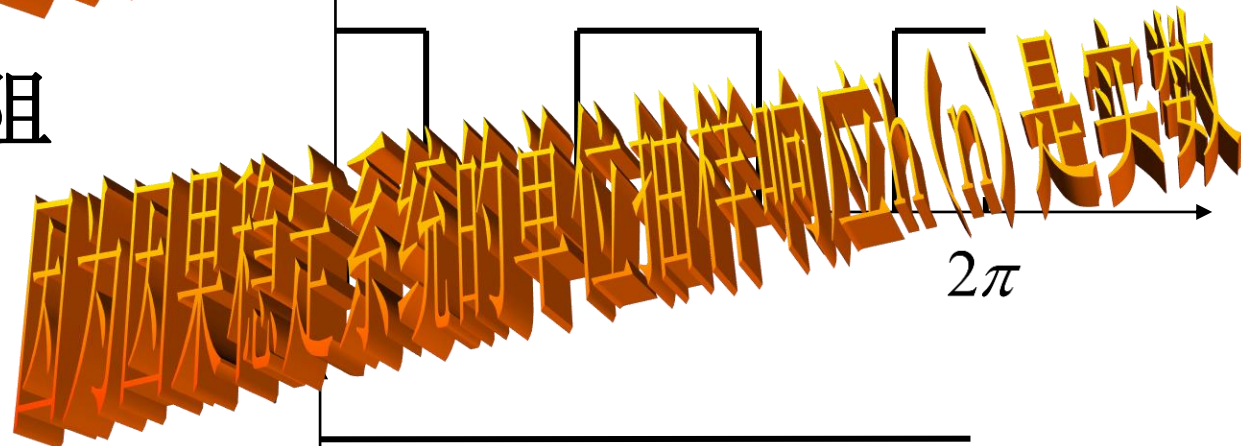




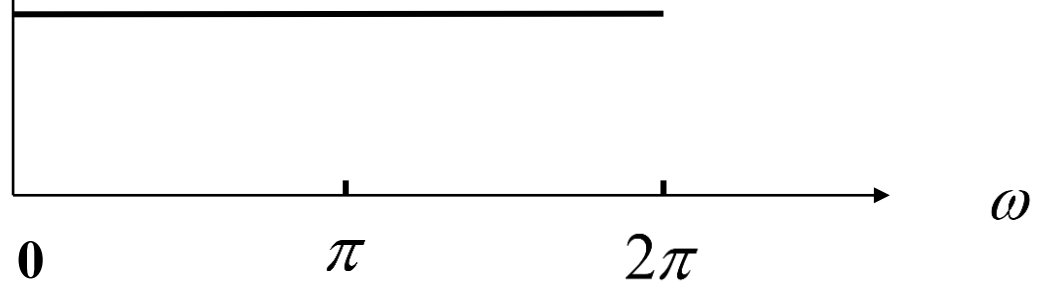
(c) 带通



(d) 带阻



(e) 全通



- 数字滤波器是一个线性移不变离散时间系统，设计步骤为四步：
 1. 按照任务的要求，确定滤波器的性能要求；
 2. 用一个因果稳定的离散线性移不变系统的系统函数去逼近这一性能要求。系统函数可以有两种形式：
 - 无限长单位冲激响应（**IIR**）系统函数
 - 有限长单位冲激响应（**FIR**）系统函数

- 3. 利用有限精度算法来实现该系统函数；
 - 选择结构（第五章）
 - 选择合适的字长（系数及变量量化，第九章）
 - 有效数字处理方法（舍入、截尾，第九章）

- 4. 实际的技术实现
 - 通用计算机软件实现
 - 专用数字滤波器硬件实现
 - 专用数字信号处理器实现
 - 通用数字信号处理器实现

- 本章重点学习第二个步骤，
 - 即数字滤波器的逼近性能问题，
 - 或系统函数（**IIR/FIR**）的设计问题。

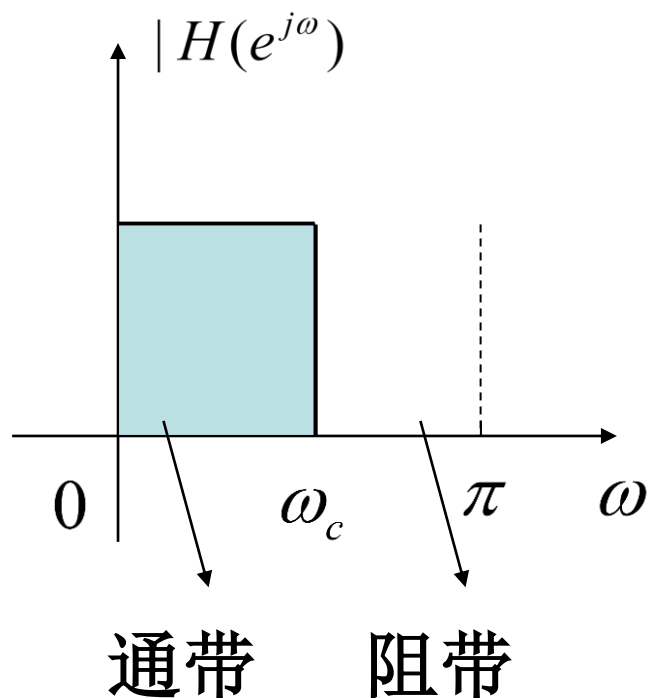
- 滤波器的性能要求一般用其频率响应的幅度特性的允许误差来表征。

- 理想低通滤波器的三个范围：

- 通带

- 阻带

- 具有陡截止的通带、阻带

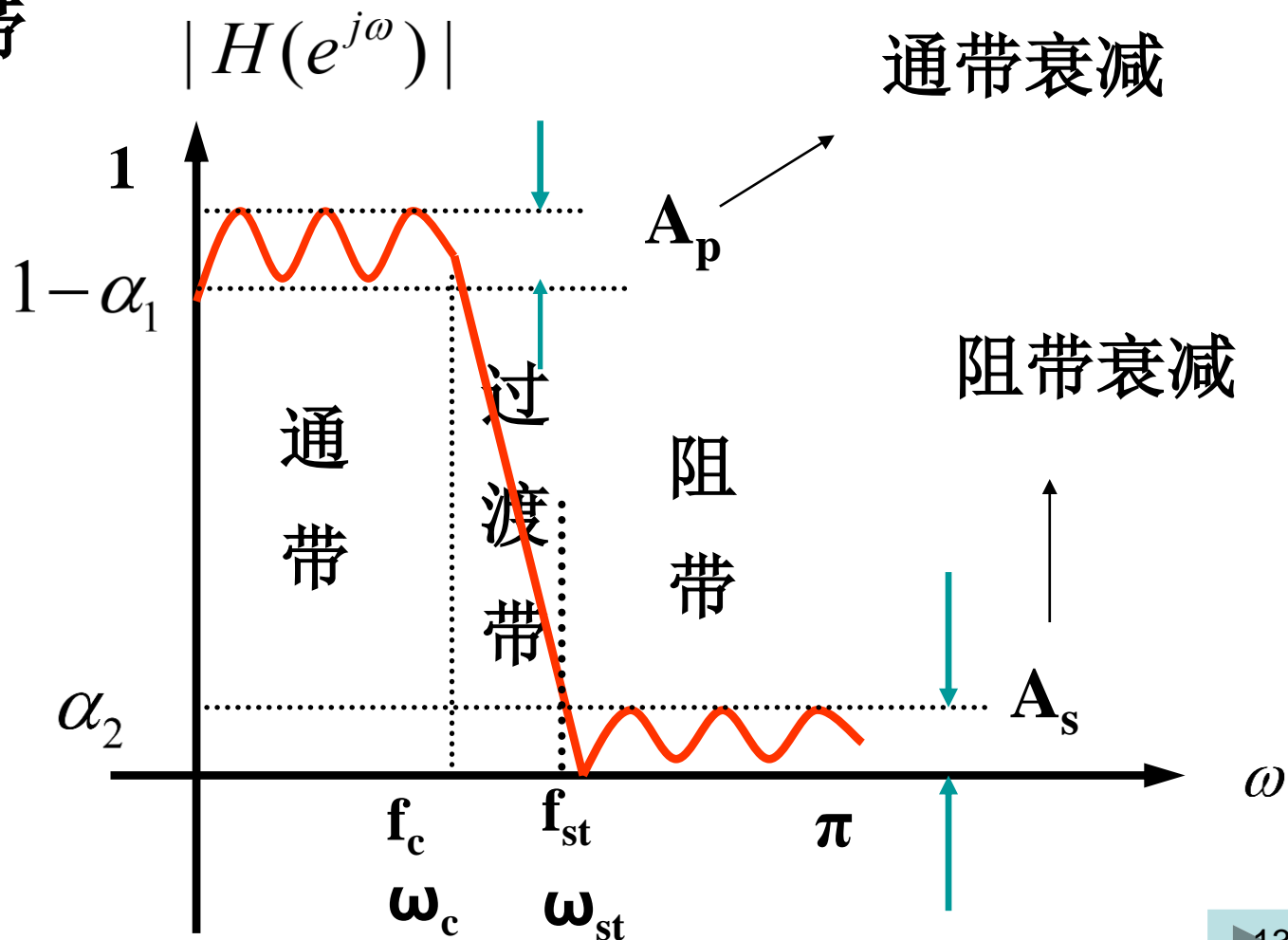


实际低通滤波器的三个范围：

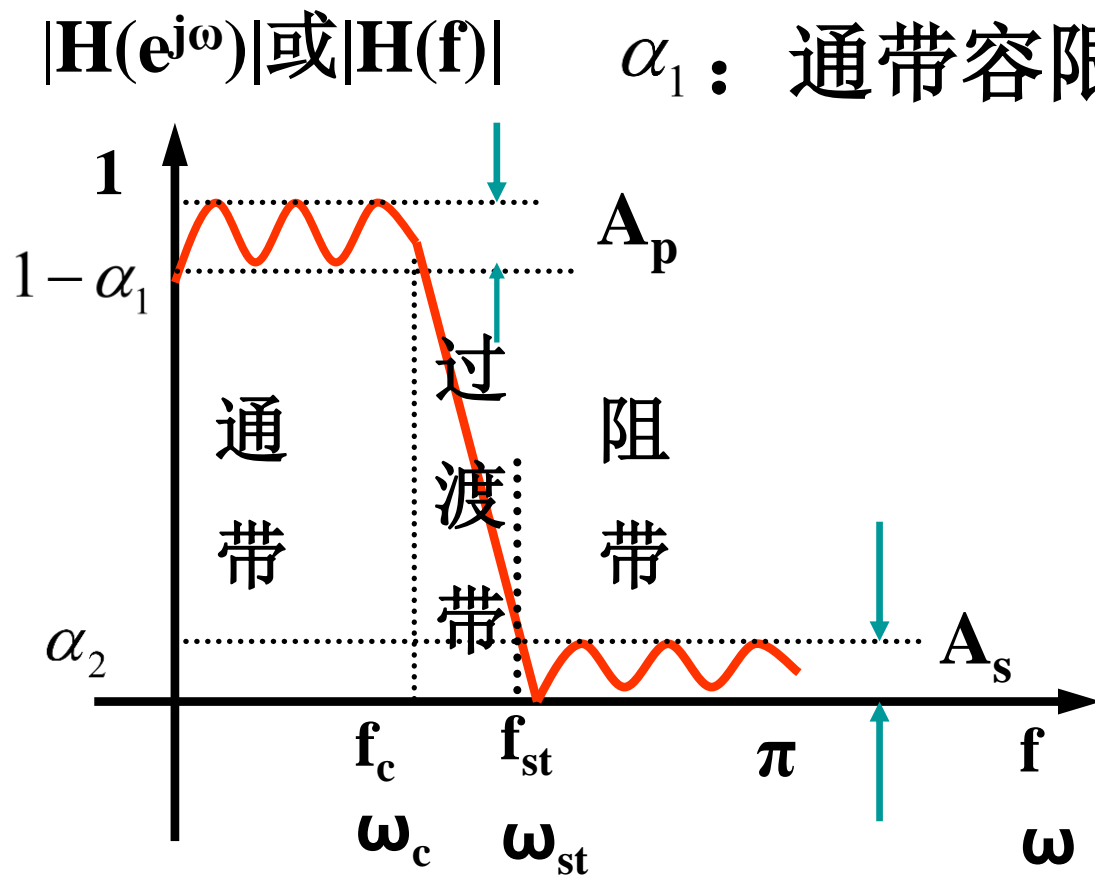
→ 通带

→ 过渡带

→ 阻带



1)、低通滤波器的性能指标



α_1 : 通带容限

α_2 : 阻带容限

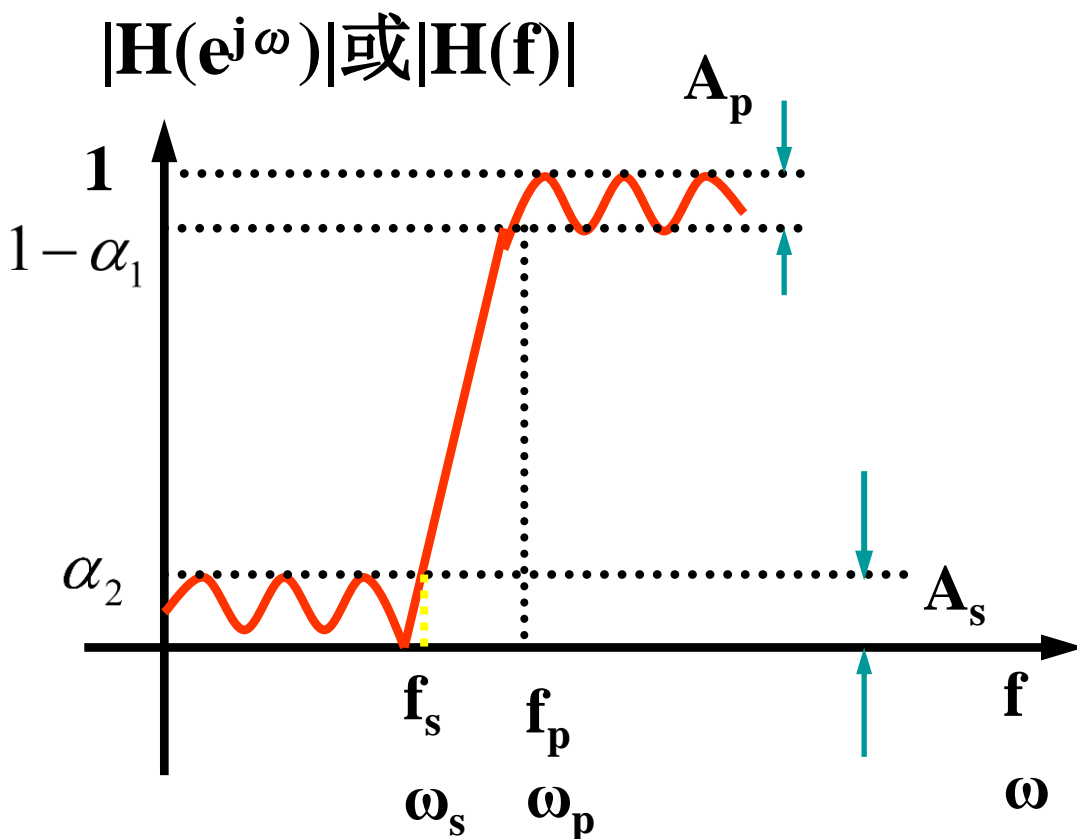
通带截止频率:
 $f_c(\omega_c)$ 又称为通带
上限频率。

通带衰减: A_p

阻带截止频率:
 $f_{st}(\omega_{st})$ 又称阻带下
限截止频率。

阻带衰减: A_s

2)、高通滤波器的性能指标



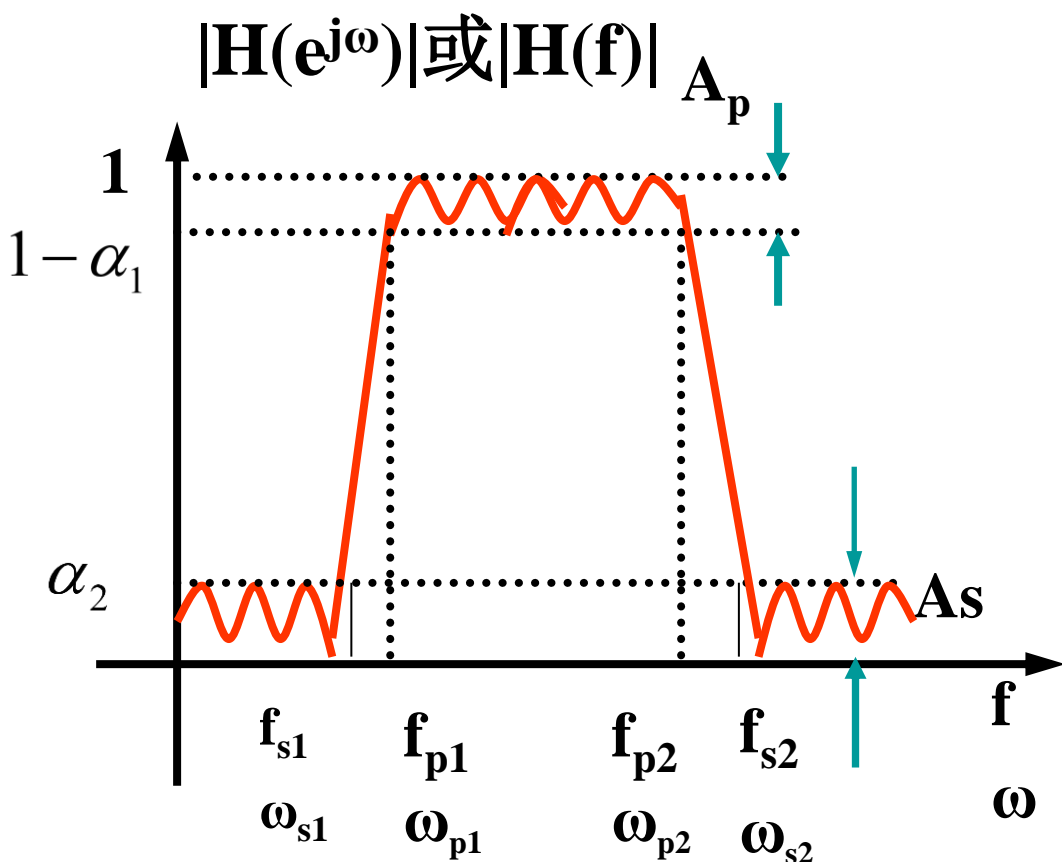
通带截止频率：
 $f_p(\omega_p)$ 又称为通带下限频率。

通带衰减： A_p

阻带截止频率：
 $f_s(\omega_s)$ 又称阻带上限截止频率。

阻带衰减： A_s

3)、带通滤波器的性能指标



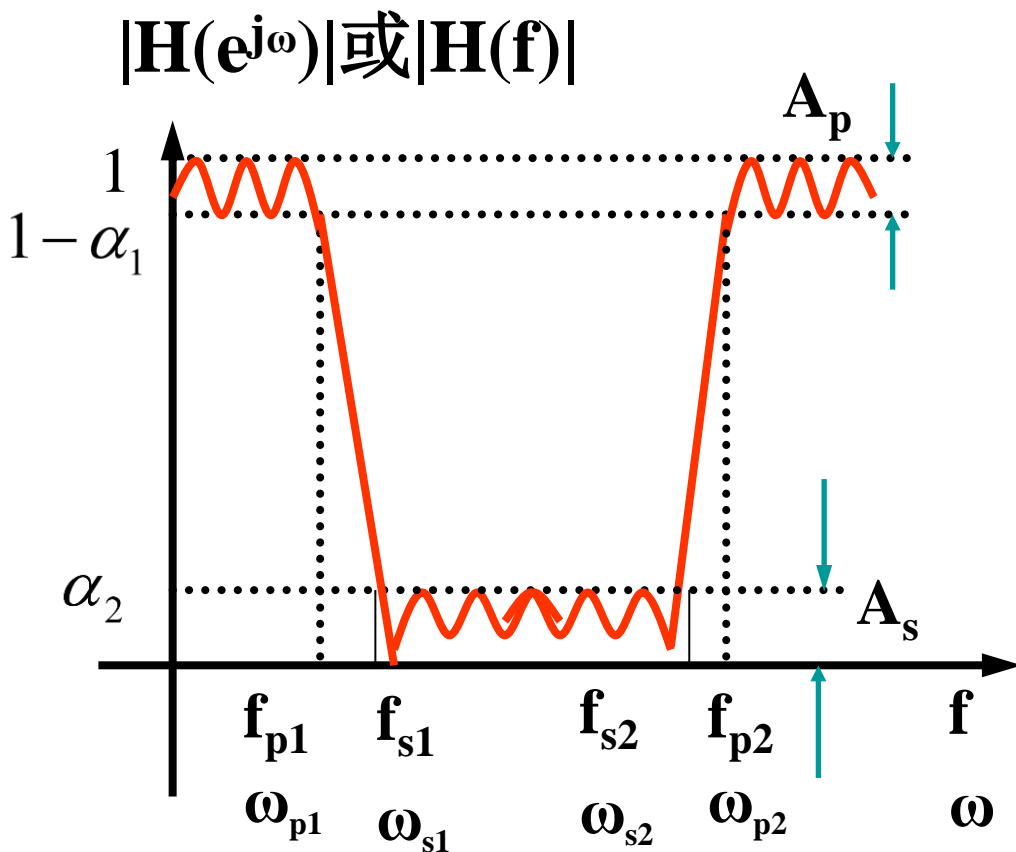
通带截止频率：上限
截止频率 $f_{p2}(\omega_{p2})$ ，
下限截止频率
 $f_{p1}(\omega_{p1})$ 。

通带衰减： A_p

阻带截止频率：上限
截止频率 $f_{s2}(\omega_{s2})$ ，
下限截止频率
 $f_{s1}(\omega_{s1})$ 。

阻带衰减： A_s

4)、带阻滤波器的性能指标



通带截止频率：上限
截止频率 $f_{p2}(\omega_{p2})$ ，下
限截止频率 $f_{p1}(\omega_{p1})$ 。

通带衰减： A_p

阻带截止频率：上限
截止频率 $f_{s2}(\omega_{s2})$ ，下
限截止频率 $f_{s1}(\omega_{s1})$ 。

阻带衰减： A_s

(1) 通带内，幅度响应以误差 α_1 逼近于1

$$1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad |\omega| \leq \omega_c$$

(2) 阻带内，幅度响应以误差 α_2 逼近于0

$$|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2, \quad \omega_{st} \leq |\omega| \leq \pi$$

(3) 在过渡带，幅度响应平滑从通带下降到阻带

式中， $\alpha_1 \rightarrow$ 通带容限

$\alpha_2 \rightarrow$ 阻带容限

$\omega_c \rightarrow$ 通带截止频率

$\omega_{st} \rightarrow$ 阻带开始频率

在实际中，常常采用通带允许的最大衰减 δ_1 和阻带应达到的最小衰减 δ_2 表示，

$$\delta_1 = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_c})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_c})| = -20 \lg(1 - \alpha_1)$$

$$\delta_2 = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20 \lg \alpha_2$$

上式中，假定 $|H(e^{j0})| = 1$

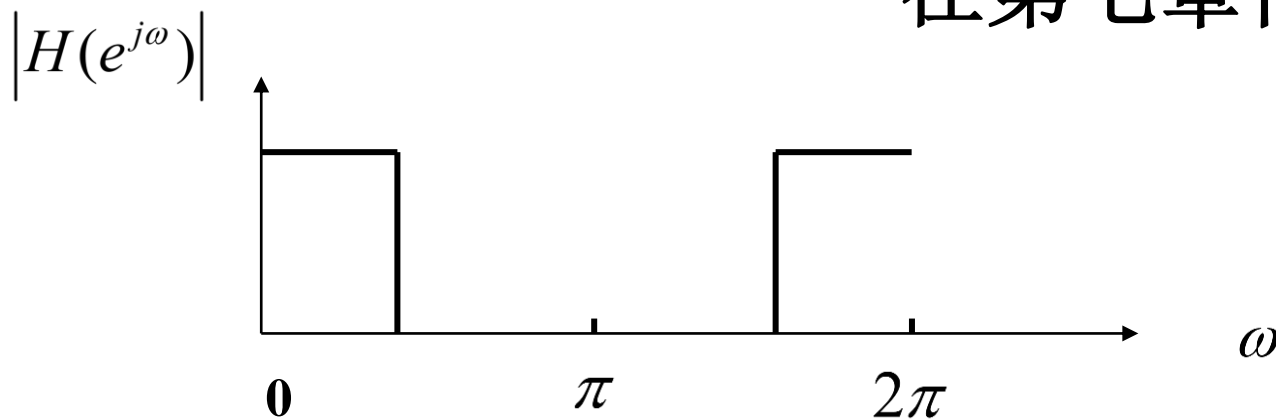
例如： $|H(e^{j\omega_c})| = 0.707, \Rightarrow \delta_1 = 3dB$

$|H(e^{j\omega_{st}})| = 0.001, \Rightarrow \delta_1 = 60dB$

- 理想滤波器幅度频率响应
- 理想滤波器的幅度频率响应是不可能实现的
- 原因：
 - 频带之间的幅度响应是突变的，
 - 其单位抽样响应是非因果的。



在第七章仔细讲解



- 数字滤波器的系统函数 $H(z)$
- 数字滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$
- 表征数字滤波器的频率响应特性

→ 幅度平方响应 $|H(e^{j\omega})|^2$

→ 相位响应 $\beta(e^{j\omega})$

→ 群延迟响应 $\tau(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(e^{j\omega})}$$

1、幅度平方响应


- 标准的低通、高通、带通、带阻滤波器的逼近采用幅度逼近，而不考虑相位要求。
- 因为单位抽样响应是实数，其傅里叶变换（频谱）是复数，其幅度响应（幅度谱）是一个根号表示，故采用幅度平方响应表示。

- 幅度平方响应定义

幅度谱偶对称
相位谱奇对称

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \\ \Rightarrow &= |H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

- 频率响应满足共轭对称条件 $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$

- 若 $z = re^{j\omega}$ 是 $H(z)$ 的根，则 $z = \frac{1}{r}e^{-j\omega}$ 是 $H(z^{-1})$ 的根。 
- 由于 $H(z)$ 的有理表达式的系数为实数，故零极点都是以共轭对形式出现，故 $z = re^{-j\omega}$ 和 $z = \frac{1}{r}e^{j\omega}$ 也是 $H(z)$ 或 $H(z^{-1})$ 的根
- 因此， $H(z)H(z^{-1})$ 的极点既是共轭的，也是以单位圆镜像对称的。
- 要使 $H(z)$ 成为物理可实现系统，其极点只能位于单位圆内，故可选择单位圆内的极点为 $H(z)$ 的极点，而单位圆外的极点为 $H(z^{-1})$ 的极点。

2、相位响应

将 $H(e^{j\omega})$ 表示为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(e^{j\omega})} \\ &= \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] + j \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

故相位响应（相位谱）为，

$$\beta(e^{j\omega}) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$$

3、群延迟响应

- 群延迟定义为相位对角频率的导数的负值，表示滤波器平均延迟的一个度量。

$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- 当滤波器具有线性相位特性时，则群延迟就是常数。

$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} = a$$

即相位响应为线性函数 $\beta(e^{j\omega}) = a\omega + b$

IIR数字滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$



- 一般满足： $M \leq N$ ，此时称为**N阶(IIR)系统**
- 若 $M > N$ ，则 $H(z)$ 可以表示为一个 **N阶 (IIR)** 系统和一个 **(M-N) 阶FIR子系统的级联**。
- 以后，对于**IIR系统**，只考虑 $M \leq N$ 情况。



- **IIR数字滤波器的设计**，就是如何求出各系数 a_k 和 b_k ，使得满足以下条件时逼近所要求的特性。
 - (1) 通带起伏及阻带衰减的要求，或
 - (2) 采用最优化准则（最小均方误差要求或最大误差最小要求等）。
- 是一个数学逼近问题。
- 如果在 s 平面上去逼近，就是模拟滤波器设计。
- 如果在 z 平面上去逼近，就是数字滤波器设计。

- 设计数字IIR滤波器一般有两种方法：
 - (1) 先设计一个合适的模拟滤波器，然后变换成满足预定指标的数字滤波器。

原因：方便。模拟滤波器已经有很多简单又现成的设计公式，设计参数已经表格化了，方便准确。
 - (2) 计算机辅助设计法。是一种最优化方法，先确定一种最优规则，然后求此规则下滤波器系统函数的系数 a_k , b_k

6.2 最小相位延时系统

一个线性移不变系统，其系统函数为


$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = K z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = K e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$



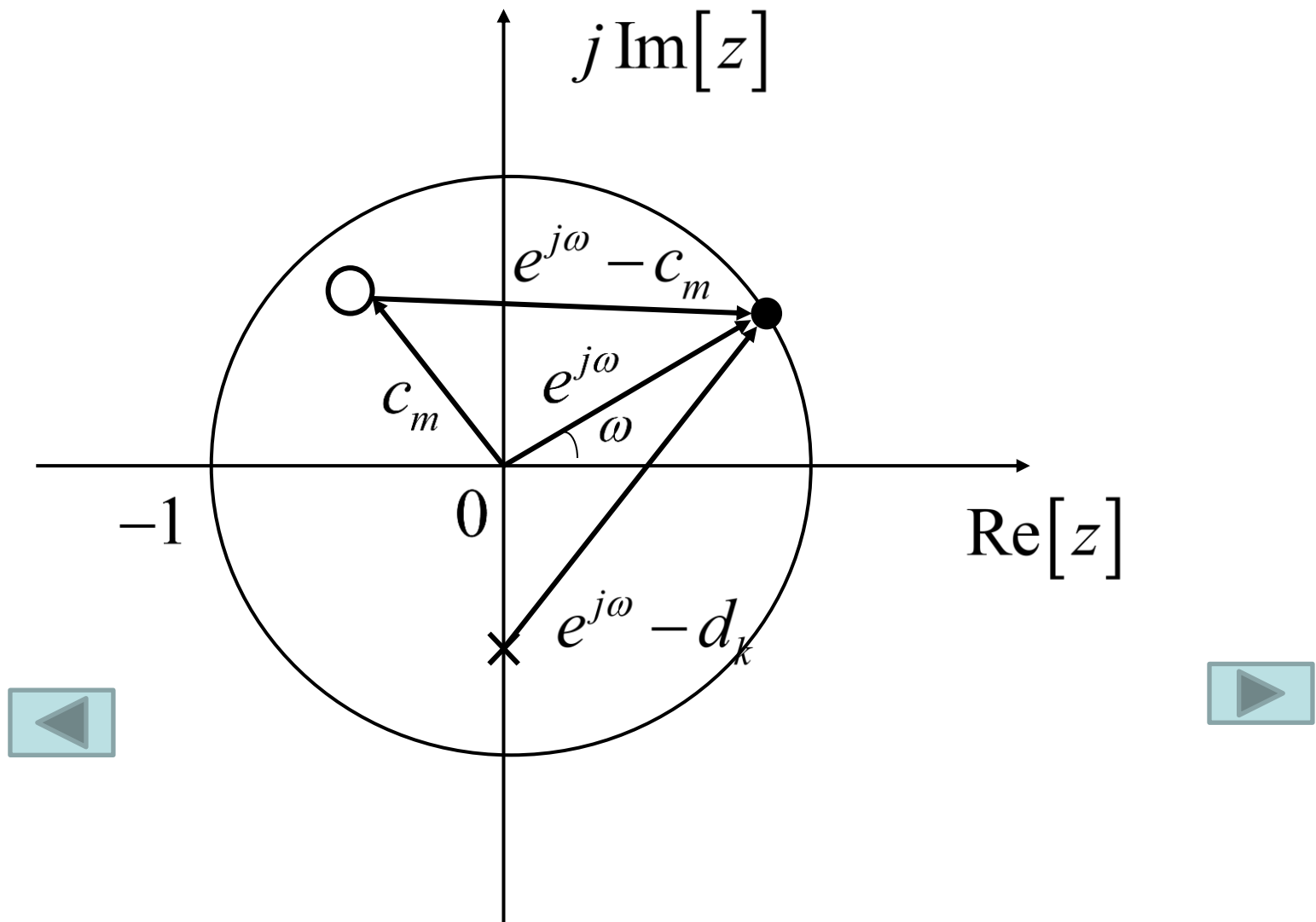
- 由于单位取样响应为实数，故K为实数（正或者负），它对幅角只引入固定值（0 或者 π ）
- 研究 $H(e^{j\omega})/K$

$\frac{H(e^{j\omega})}{K}$ 的模 $\left| \frac{H(e^{j\omega})}{K} \right|$ 为 

$$\left| \frac{H(e^{j\omega})}{K} \right| = \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}$$

- 零（极）矢量是指零（极）点指向z平面单位圆上要研究的频率点的矢量。（ $e^{j\omega} - c_m$ ）表示从 c_m 指向 $e^{j\omega}$ 的矢量。





极矢量、零矢量的几何解释

$$\left| \frac{H(e^{j\omega})}{K} \right| = \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}$$

采用几何作图法可以确定滤波器的类型。



$\frac{H(e^{j\omega})}{K}$ 的相位（相角） $\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]$ 为



$$\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = \arg\left[e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \right]$$

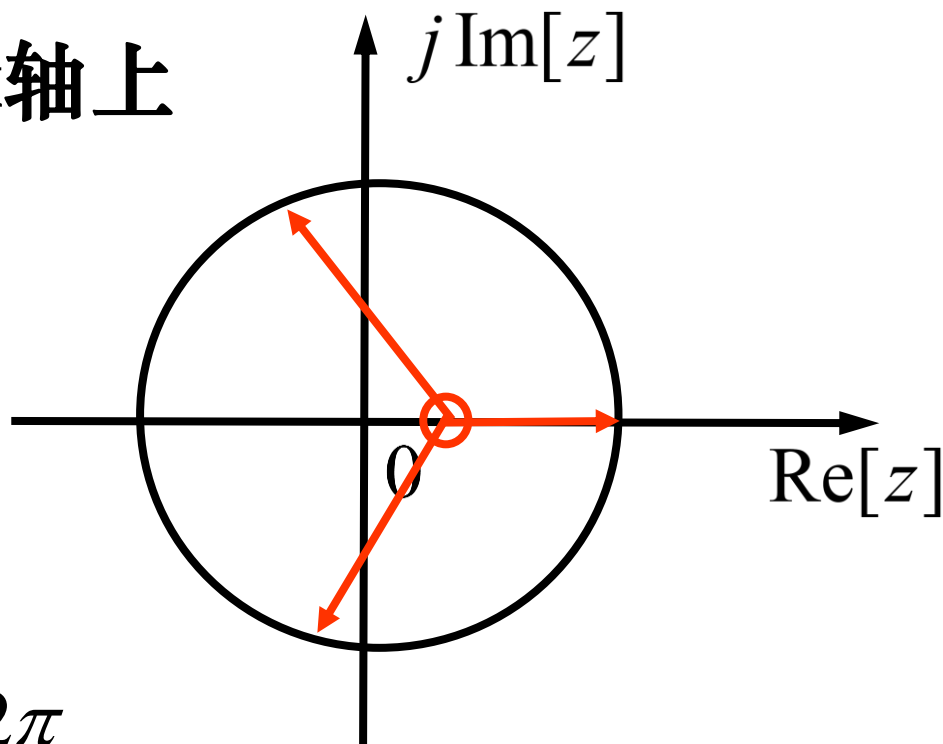
$$\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N-M)\omega$$

= 各零矢量幅角之和 - 各极矢量幅角之和 + (N-M) ω

我们来研究当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi, \Delta\omega = 2\pi$

零点（极点）位置对系统相位的变化情况

(1) 在单位圆内的x轴上



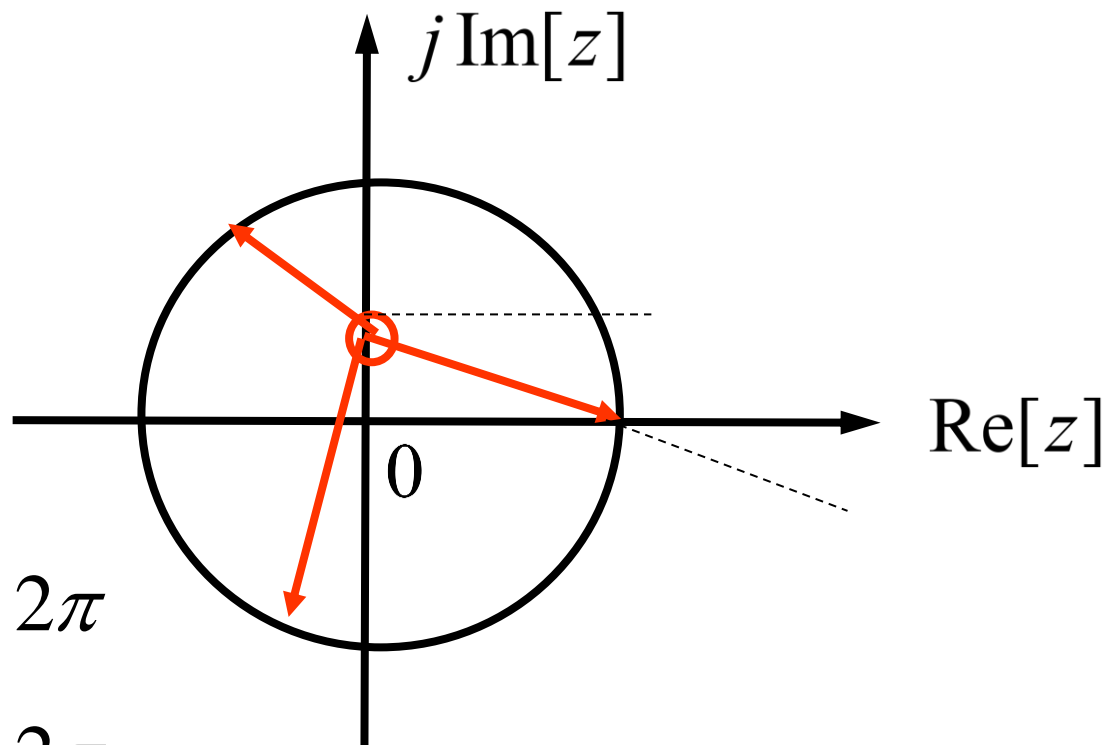
$$\Delta \arg [e^{j\omega} - c_m] = 2\pi$$

$$\Delta \arg [e^{j\omega} - d_k] = 2\pi$$

我们来研究当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi, \Delta\omega = 2\pi$

零点（极点）位置对系统相位的变化情况

(2) 在单位圆内的y轴上



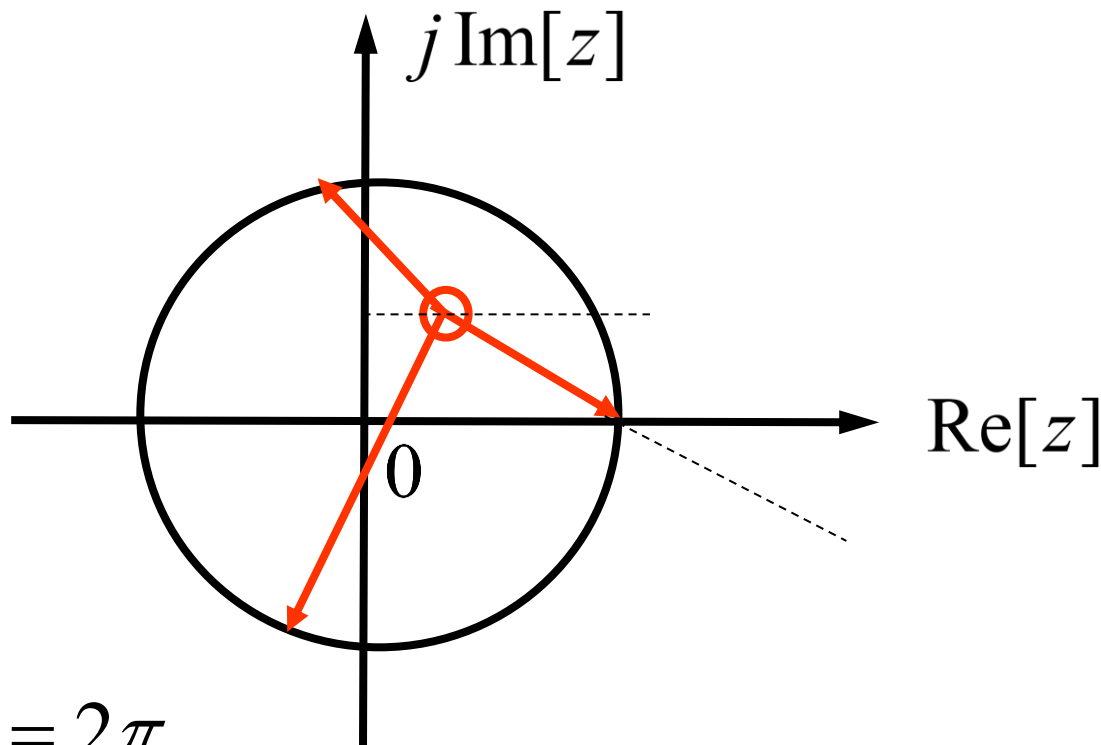
$$\Delta \arg [e^{j\omega} - c_m] = 2\pi$$

$$\Delta \arg [e^{j\omega} - d_k] = 2\pi$$

我们来研究当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi, \Delta\omega = 2\pi$

零点（极点）位置对系统相位的变化情况

(3) 在单位圆内



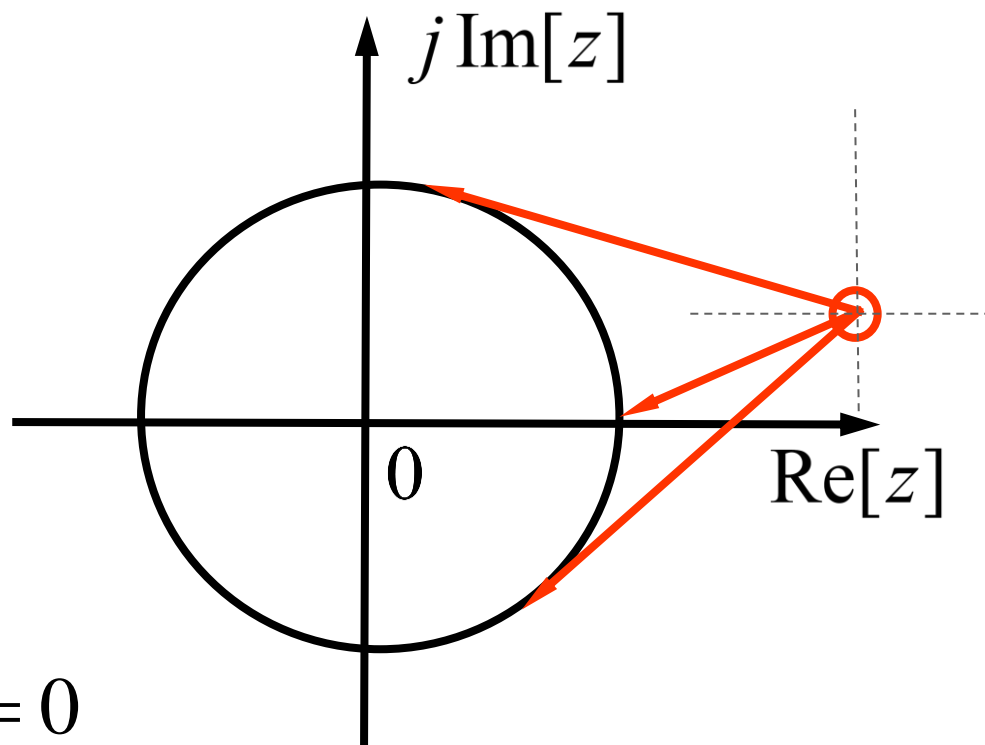
$$\Delta \arg [e^{j\omega} - c_m] = 2\pi$$

$$\Delta \arg [e^{j\omega} - d_k] = 2\pi$$

我们来研究当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi$, $\Delta\omega = 2\pi$

零点（极点）位置对系统相位的变化情况

(4) 在单位圆外



$$\Delta \arg \left[e^{j\omega} - c_m \right] = 0$$

$$\Delta \arg \left[e^{j\omega} - d_k \right] = 0$$

- 总结：
- 若某一个零点（或极点）位于单位圆内，当 ω 从0变到 2π 时，即在 z 平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周，零矢量（或极矢量）变化为 2π
- 若某一个零点（或极点）位于单位圆外，当 ω 从0变到 2π 时，即在 z 平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周，零矢量（或极矢量）变化为 0
- 故，只有单位圆内的零极点对 $\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]$ 有影响。

- m_i 和 m_o 分别表示单位圆内与单位圆外的零点个数
- p_i 和 p_o 分别表示单位圆内与单位圆外的极点个数

$$M = m_i + m_o, \quad N = p_i + p_o$$

- 当 ω 从0变化到 2π 相位 $\arg[\frac{H(e^{j\omega})}{K}]$ 为

$$\arg[\frac{H(e^{j\omega})}{K}] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

= 各零矢量幅角之和 - 各极矢量幅角之和 + $(N - M)\omega$

$$= 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M)$$

- 讨论零点、极点的分布对不同系统相角的影响。

(1) 因果系统

因果稳定系统，系统函数 $H(z)$ 的全部极点在单位圆内，收敛域是半径为 r ($r < 1$) 的单位圆外，且满足 $n < 0$ 时， $h(n)=0$ 。

$$p_o = 0, \quad p_i = N$$

当 ω 从 0 变到 2π 时， $\Delta\omega = 2\pi$ ，则 $\frac{H(e^{j\omega})}{K}$ 的幅角变化量为

$$\begin{aligned} \Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] \Big|_{\Delta\omega=2\pi} &= 2\pi[m_i - p_i] + 2\pi[N - M] \\ &= 2\pi m_i - 2\pi M = -2\pi m_o \end{aligned}$$

- 这种当 ω 由 0 而增加，幅角变化为负，称为相位“延时”（或相位“滞后”）系统。
- 根据零点的分布可以有以下两种情况：

（a）当全部零点都在单位圆内时，即

$$m_i = M, \quad m_o = 0$$

$\Rightarrow \left\| \frac{G(j\omega)}{K} \right\|_{\Delta\omega=2\pi} = 0$

为什么是因果稳定系统？

此时，相位变化最小。这种系统称为最小相位延时系统。

最小相位延时系统一定是因果稳定系统。

(b) 当全部零点都在单位圆外时，即

$$m_o = M, \quad m_i = 0$$

$$\Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]\Big|_{\Delta\omega=2\pi} = -2\pi m_o$$

$$\Rightarrow \Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]\Big|_{\Delta\omega=2\pi} = -2\pi M$$

此时，相位变化最大。这种系统称为最大相位延时系统。

最大相位延时系统一定是因果稳定系统。

(2) 混合系统

全部极点在单位圆内，零点既在单位圆内 m_i ，也有在单位圆外时 m_o ，即

$$m_i + m_o = M$$

$$\begin{aligned}\Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]\Big|_{\Delta\omega=2\pi} &= 2\pi[m_i - p_i] + 2\pi[N - M] \\ &= 2\pi m_i - 2\pi M = -2\pi m_o\end{aligned}$$

称为混合（相位延时）系统。

混合系统一定是因果稳定系统。

(3) 逆因果系统

逆因果系统，系统函数极点分布在单位圆外，收敛域是单位圆内，且满足 $n > 0$ 时，

非因果系统：收敛区域不满足： $|z| > r$
即其极点可以任意分布在 z 平面，如单位圆内、外均有分布。

$$p_i = 0, \quad p_o = N$$

当 ω 从 0 变到 2π 时， $\Delta\omega = 2\pi$ ，则 $\frac{H(e^{j\omega})}{K}$ 的幅角变化量为

$$\begin{aligned}\Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] \Big|_{\Delta\omega=2\pi} &= 2\pi [m_i - p_i] + 2\pi [N - M] \\ &= 2\pi m_i + 2\pi [N - M]\end{aligned}$$

- 一般而言，有 $N > M$ ，当 ω 由 0 而增加，幅角变化为正，称为相位“超前”（或相位“领先”）系统。
- 根据零点的分布可以有以下两种情况：

（a）当全部零点都在单位圆内时，即

$$m_i = M, \quad m_o = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \arg \left[\frac{G(s)}{K} \right] \Big|_{\Delta \omega = 2\pi} = 2\pi N$$

为什么是逆因果稳定系统？

此时，相位变化最大。这种系统称为最大相位超前系统。

最大相位超前系统一定是逆因果稳定系统。

(b) 当全部零点都在单位圆外时，即

$$m_o = M, \quad m_i = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] \Big|_{\Delta\omega=2\pi} = 2\pi (N - M)$$

此时，相位变化最小。这种系统称为最小相位超前系统。

最小相位超前系统一定是逆因果稳定系统。

四种系统的归纳



系 统	因果性	稳定性	零 点	极 点
最小相位 延时系统	因果	<div>收敛域</div> $ z > r, r < 1$		单位圆内
最大相位 延时系统	因果			单位圆内
混合系统	因果	稳定	单位圆内外	单位圆内
最小相位 超前系统	逆因果	<div>收敛域</div> $ z < r, r > 1$		单位圆外
最大相位 超前系统	逆因果			单位圆外

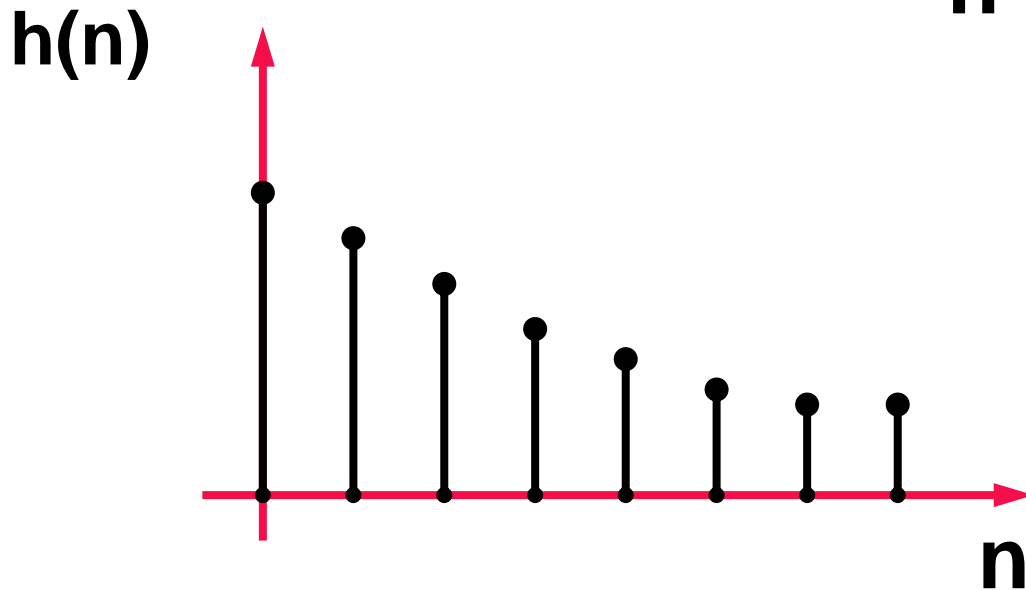
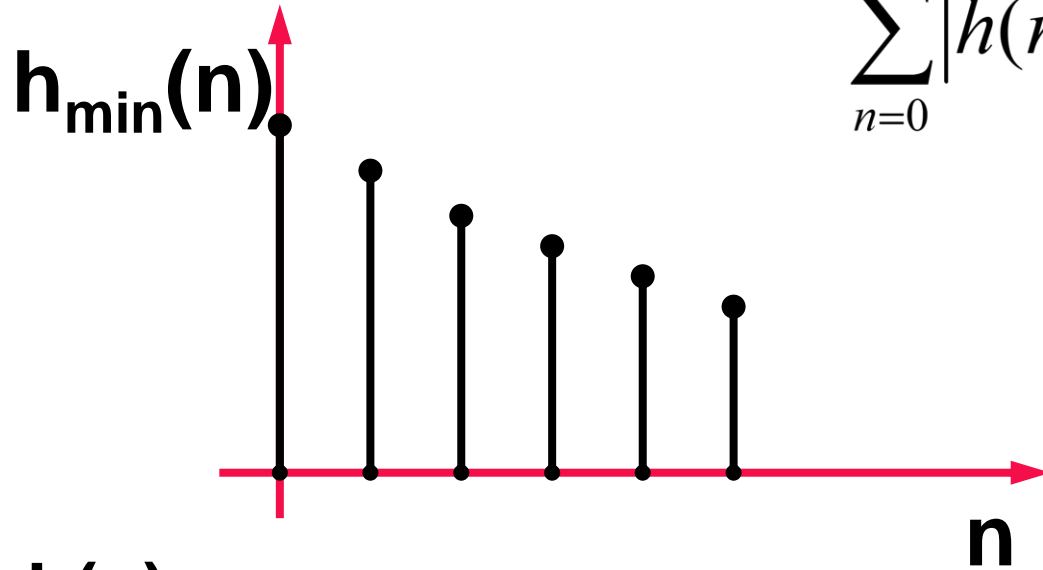
最小相位系统的特点

1. 在傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 相同的所有系统中，最小相位系统具有最小的相位滞后，即它的负的相位最小。
2. 最小相位系统能量集中在 $n=0$ 附近。

$$\sum_{n=0}^m |h(n)|^2 < \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \quad m < N-1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h_{\min}(n)|^2$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h_{\min}(n)|^2$$



最小相位系统的特点

3. 最小相位序列 $h(0)$ 最大。

$$h_{\min}(0) > h(0)$$

4. 在幅度响应相同的系统中，最小相位延时系统具有最小的群延时。

$$-\frac{d \left\{ \arg \left[H_{\min}(e^{j\omega}) \right] \right\}}{d\omega} < -\frac{d \left\{ \arg \left[H(e^{j\omega}) \right] \right\}}{d\omega}$$

最小相位系统的特点

- 5. 在幅度响应相同的系统中，只有唯一的一个最小相位延时系统。
- 6. 任意一个非最小相位延时系统可以由一个最小相位延时系统和一个全通系统的级联得到。

$$H(z) = H_{\min}(z) \bullet H_{ap}(z)$$

证明见下节

6.3 全通系统

- 定义：全通系统是指系统频率响应的幅度在所有频率 ω 下均为 1 或者某一常数的系统。

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

例如，一阶全通系统的系统函数为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 实数}, 0 < |a| < 1$$

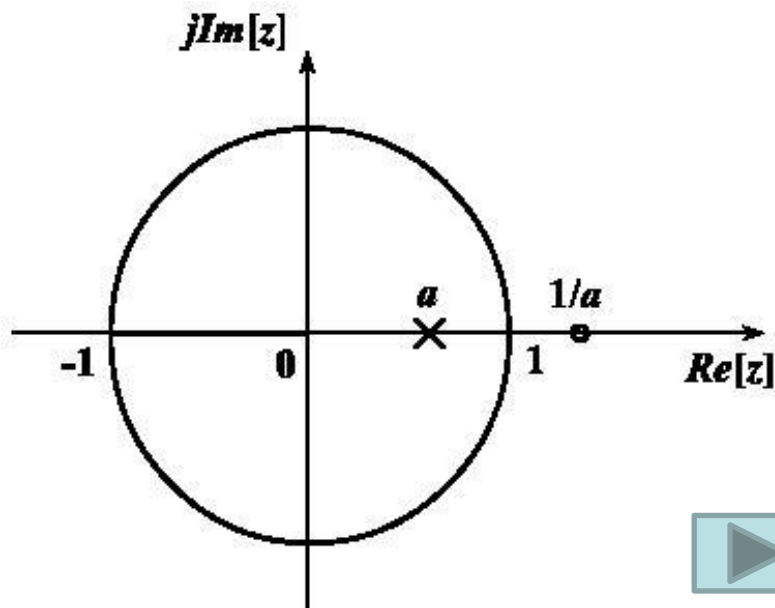
一阶全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 实数}, 0 < |a| < 1$$

系统的零极点位置如图所示 ($a > 0$)。

零点: $z = \frac{1}{a}$

极点: $z = a$



附加要求: $|a| < 1$

系统的幅度频率响应为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$$

$$\begin{aligned} |H_{ap}(e^{j\omega})| &= \left| \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{\cos \omega - j \sin \omega - a}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{(\cos \omega - a)^2 + (\sin \omega)^2}}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{(\cos \omega)^2 - 2a \cos \omega + a^2 + (\sin \omega)^2}}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + (a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}} \right| = 1 \end{aligned}$$

- 复数零点、极点的一阶全通系统的系统函数为

$$\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{复数}, 0 < |a| < 1$$

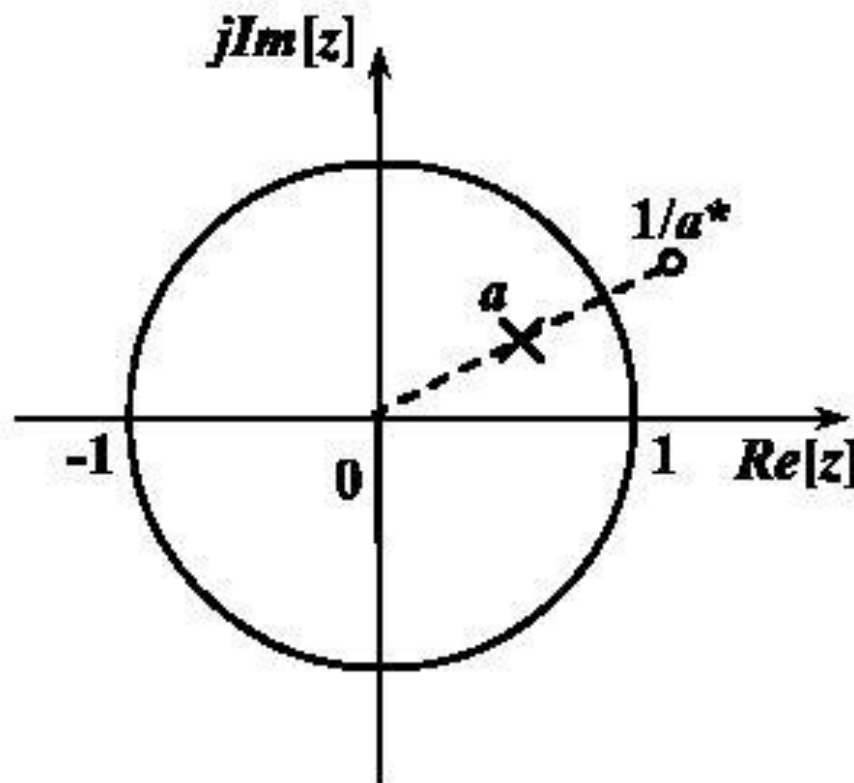
- 极点为: $z = a$
- 零点为: $z = \frac{1}{a^*}$
- 零点、极点出现在共轭镜像位置（以单位圆为“镜子”），称为以单位圆为镜像对称。

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad a \text{ 为复数}$$

$$0 < |a| < 1$$

- 极点为: $z = a$
- 零点为: $z = \frac{1}{a^*}$

零极点以单位圆为镜像对称



- 高阶全通系统是由一串一阶全通系统组成。例如二阶全通系统就是由两个一阶全通系统构成。
- 当 $h(n)$ 为实函数（物理可实现系统），则 $H(z)$ 是实系数有理系统函数，其系数都为实数，则系统函数的复数极点和零点必须以共轭对的形式出现。
- 例如一个实系数有理二阶全通系统函数为：

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - a}{1 - a^* z^{-1}}, \quad |a| < 1$$

实系数二阶全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a}{1 - a^* z^{-1}} \quad |a| < 1$$

极点: $z = a, a^*$

零点: $z = 1/a^*, 1/a$

两个零点（极点）共轭对称

零点与极点以单位圆为镜像对称

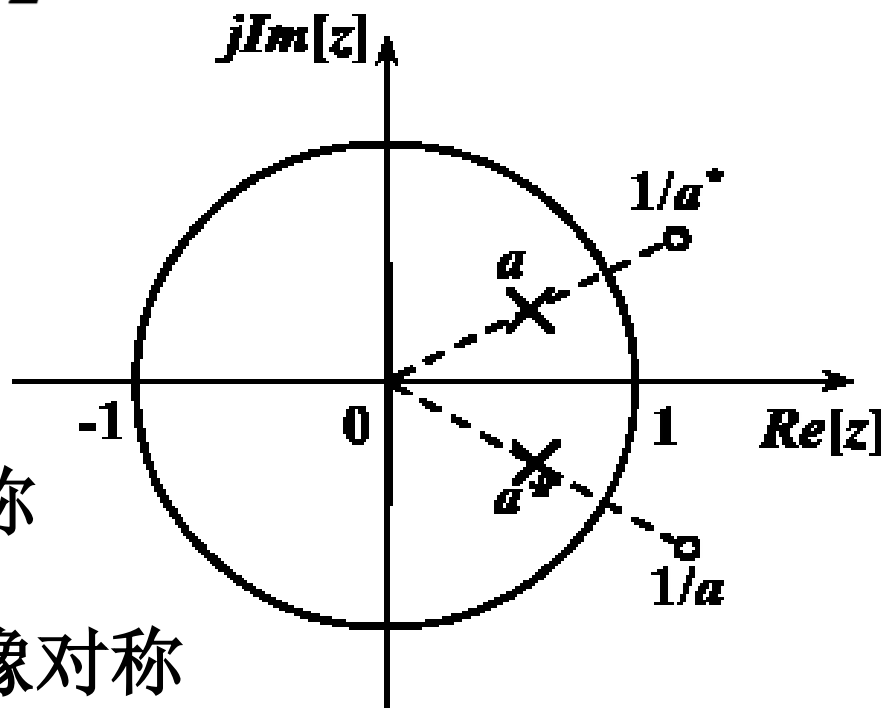


图6-5 二阶全通系统的零点-极点位置

- 所有的一阶全通节（系统），对所有的频率，其频率响应的模都为1。

令 $a = re^{j\theta}$, $z = e^{j\omega}$ 则有,



$$\begin{aligned}
 |H_{ap}(z)| &= \left| \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right| = |e^{-j\omega}| \cdot \left| \frac{1 - re^{j(\omega-\theta)}}{1 - re^{-j(\omega-\theta)}} \right| \\
 &= \left| \frac{1 - r \cos(\omega - \theta) - jr \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta) + jr \sin(\omega - \theta)} \right| \\
 &= \sqrt{\frac{[1 - r \cos(\omega - \theta)]^2 + [-r \sin(\omega - \theta)]^2}{[1 - r \cos(\omega - \theta)]^2 + [r \sin(\omega - \theta)]^2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

N 阶数字全通滤波器

$$\begin{aligned} H(z) &= \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \\ &= \pm \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + \dots + d_1 z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)} + d_N z^{-N}} \\ &= \pm \frac{z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)} \end{aligned}$$

极点： $D(z)$ 的根 $z_p = r e^{\pm j\omega} \quad r < 1$

零点： $D(z^{-1})$ 的根 $z_o = \frac{1}{r} e^{\pm j\omega} \quad r < 1$

全通系统的应用

问题：非最小相位延时系统的零极点位置？

- ① 任何一个因果稳定的（非最小相位延时）系统 $H(z)$ 都可以表示为全通系统 $H_{ap}(z)$ 和最小相位系统 $H_{mp}(z)$ 的串联。

最小相位延时系统的零点均在单位圆内，非最小相位系统的零点至少有一个在单位圆外

于单位圆外，其余在单位圆内）。

$$z = \frac{1}{z_0}, \quad z = \frac{1}{z_0^*}, \quad |z_0| < 1$$

将 $H(z)$ 表示为

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - z_0)(z^{-1} - z_0^*)$$

其中, $H_1(z)$ 是最小相位系统。

Why?

原因：因为我们假设**H(z)**只有一对零点在单位圆外，其余零点均在单位圆内。极点肯定在单位圆内（因果稳定系统），故设由单位圆内的零点和所有极点所构成的系统函数为**H₁(z)**。

对 $H(z)$ 进行处理（乘以等于1的两个有理式）：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) \bullet (z^{-1} - z_0) \bullet (z^{-1} - z_0^*) \bullet \frac{1 - z_0^* z^{-1}}{1 - z_0^* z^{-1}} \bullet \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}} \\ &= H_1(z) \bullet (1 - z_0^* z^{-1}) \bullet (1 - z_0 z^{-1}) \bullet \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \end{aligned}$$

零点： $z = z_0^*$, $z = z_0$

零点在单位圆内

最小相位系统

全通系统

故系统函数表示为：

$$H(z) = H_{\min}(z) \bullet H_{ap}(z)$$

其中，

$$H_{\min}(z) = H_1(z) \bullet (1 - z_0^* z^{-1}) \bullet (1 - z_0 z^{-1})$$

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}}$$

$$H(z) = H_{\min}(z) \bullet H_{ap}(z)$$

$H(z)$ 和 $H_{\min}(z)$ 的比较:

→ 把 $H(z)$ 的单位圆外的一对零点 $z = \frac{1}{z_0}, z = \frac{1}{z_0^*}$
 分别映射到单位圆内的“镜像”位置 $z = z_0, z = z_0^*$

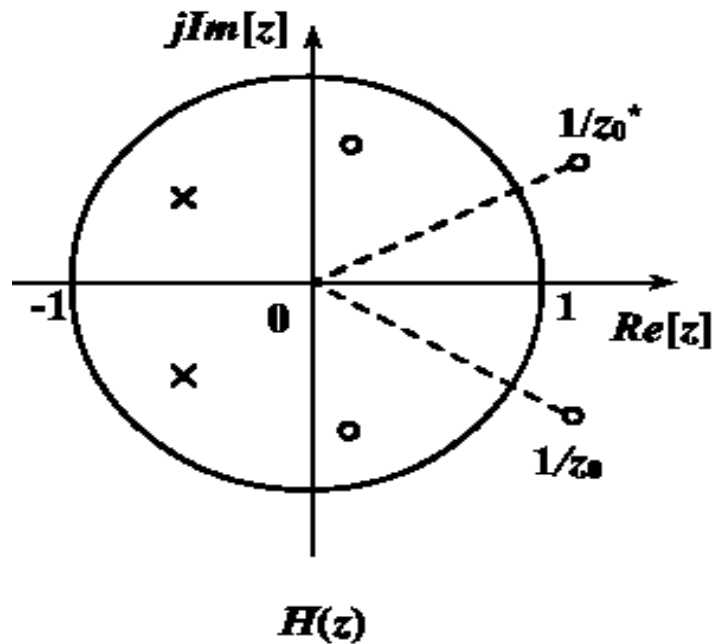
如图6-6所示。



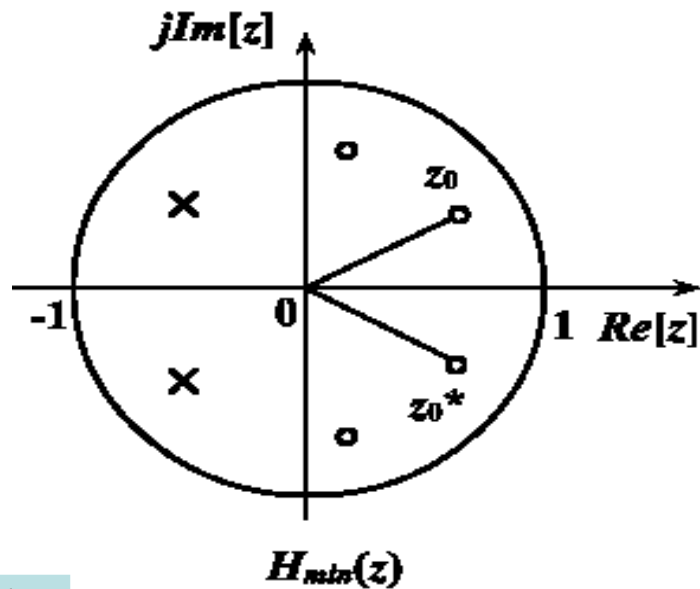
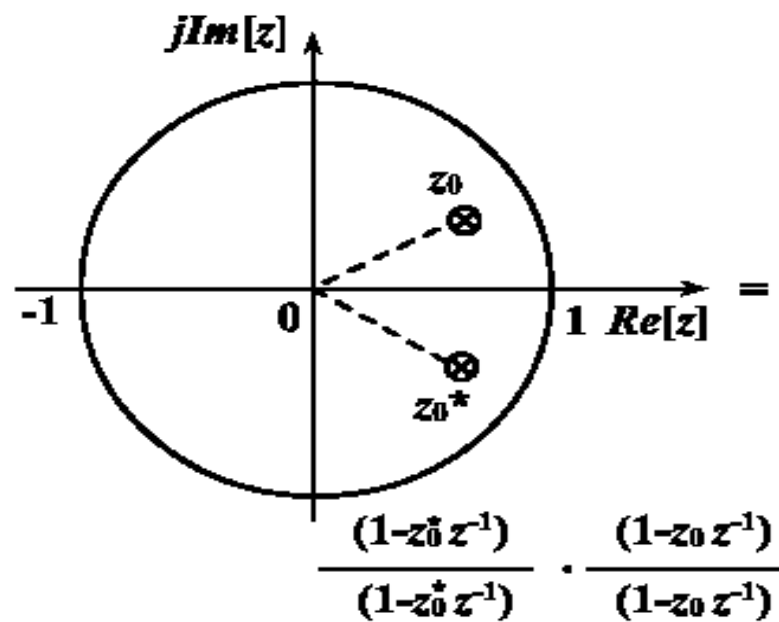
→ $H(z)$ 和 $H_{\min}(z)$ 的频率响应的幅度是相等的。

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})| \bullet |H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

→ $H(z)$ 和 $H_{\min}(z)$ 的相位响应是不相等的。



级联



级联

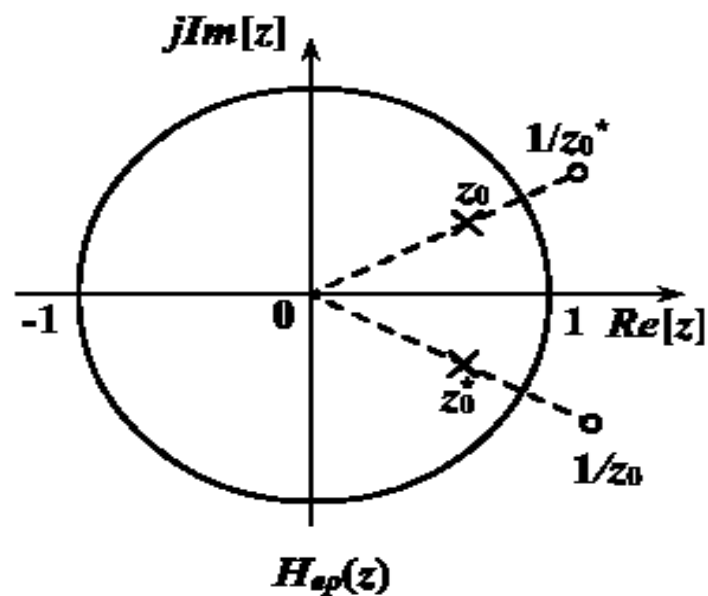


图6-6 系统的等效变换

- ② 如果设计出滤波器是非稳定的，则可用级联全通系统的方法将它变成一个稳定的滤波器。

例如，原非稳定滤波器有一对极点在单位圆外

$$z = \frac{1}{r} e^{\pm j\theta} \quad r < 1$$

为什么？

$$H(z) = H_1(z) \frac{1}{(z^{-1} - r e^{j\theta})(z^{-1} - r e^{-j\theta})}$$

则，可级联一个全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - r e^{j\theta}}{1 - r e^{-j\theta} z^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - r e^{-j\theta}}{1 - r e^{j\theta} z^{-1}}$$



$$\begin{aligned}
 H(z) \bullet H_{ap}(z) &= H_1(z) \frac{1}{(z^{-1} - re^{j\theta})(z^{-1} - re^{-j\theta})} \\
 &\quad \bullet \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{-j\theta} z^{-1}} \bullet \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta} z^{-1}} \\
 &= H_1(z) \frac{1}{(1 - re^{-j\theta} z^{-1})(1 - re^{j\theta} z^{-1})}
 \end{aligned}$$



系统的极点均在单位圆内。

将单位圆外的一对极点抵消，同时，不改变滤波器的幅度特性（当然，相位改变）。

- ③ 作为相位均衡器用（将非线性相位滤波器转换为线性相位滤波器）。
- IIR数字滤波器的相位是非线性相位的，其群延时不是常数。
 - 在视频传输、数字通信中希望传输系统具有线性相位特性，因此，可以将全通滤波器作为相位均衡器，级联上一个非线性相位系统，以得到线性相位特性，同时不改变系统的幅度特性。
 - 设全通滤波器为 $H_{ap}(z)$ ，非线性相位系统为 $H_d(z)$ ，级联后系统为 $H(z)$



$$H(z) = H_{ap}(z) \bullet H_d(z)$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_{ap}(e^{j\omega}) \bullet H_d(e^{j\omega}) \\ &= |H_{ap}(e^{j\omega})| \bullet |H_d(e^{j\omega})| \bullet e^{j[\varphi_{ap}(\omega) + \varphi_d(\omega)]} \\ &= |H_d(e^{j\omega})| \bullet e^{j[\varphi_{ap}(\omega) + \varphi_d(\omega)]} \end{aligned}$$



相位关系为: $\gamma(\omega) = \varphi_{ap}(\omega) + \varphi_d(\omega)$

群延时关系为: $\tau(\omega) = \tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) = \tau_0$

逼近误差为: $e^2 = [\tau(\omega) - \tau_0]^2 = [\tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) - \tau_0]^2$

e^2 是频率 ω 、全通滤波器的极点和系数的函数，
根据均方误差最小准则，可以求出极点和系数。

6.4 用模拟滤波器滤波器 设计IIR数字滤波器

- 模拟系统函数 $H_a(s)$
- 数字滤波器的系统函数 $H(z)$
- 利用模拟滤波器设计数字滤波器，就是要将 s 平面映射到 z 平面，使模拟系统函数 $H_a(s)$ 变换成所需的数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

一、由模拟滤波器设计数字滤波器步骤

- **由模拟滤波器设计数字滤波器的3个步骤：**
 - 1. 数字滤波器的技术指标转换成模拟低通滤波器指标。**
 - 2. 模拟低通滤波器设计。**
 - 3. 映射实现：从模拟低通滤波器再转换成数字滤波器。**

1. 数字滤波器的技术指标转换成模拟滤波器指标

- 根据给定设计要求，把数字滤波器的性能指标变成模拟滤波器低通的性能指标。
- 如果要设计的不是数字低通滤波器，则还需要将步骤（1）中的变换所得到的相应的（高通、带通、带阻）模拟滤波器的性能指标变换为模拟低通滤波器的性能指标。
- 原因：只有模拟低通滤波器设计可以有设计好的图形和表格使用。

2、模拟滤波器设计

- 用所得到的模拟低通滤波器（称作**模拟原型滤波器**）的性能指标，利用某种模拟滤波器逼近方法，设计出符合要求的模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。
- 可以选择多种类型的滤波器。如：
Butterworth, Chebyshev, Ellipse, Bessel 等。

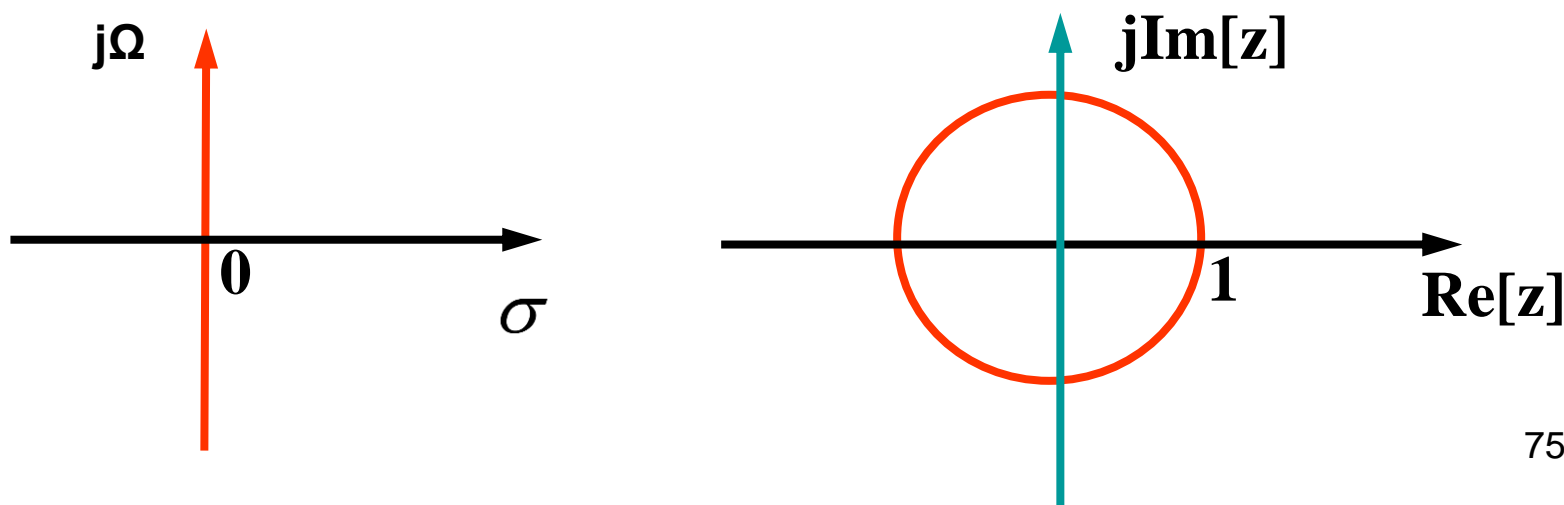
3、映射实现

- **利用一定的映射方法，把模拟滤波器系统函数数字化,完成IIR数字滤波器系统函数的设计。（采用冲激不变法、阶跃响应不变法和双线性变换法）**

二、由模拟滤波器设计数字滤波器条件

• 由模拟变换到数字的映射必须满足两个基本要求:

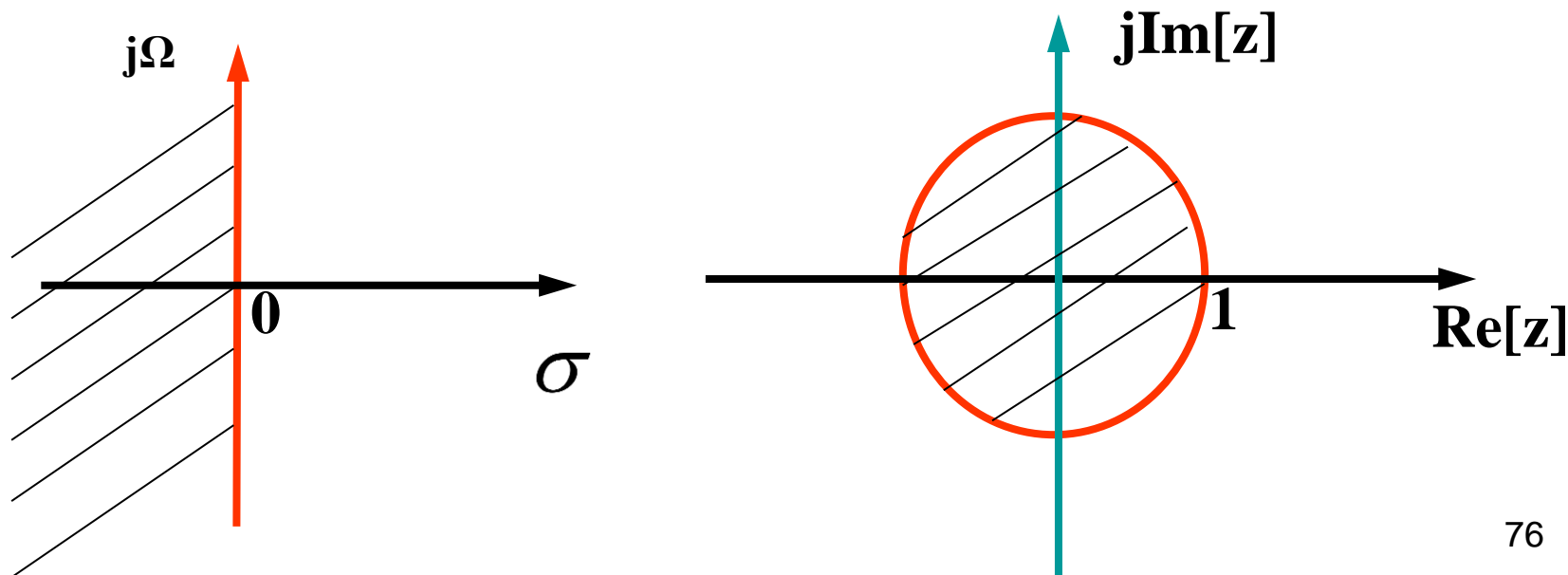
① $H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应。即：
 S 平面的虚轴 $j\Omega$ 必须映射到 z 平面的单位圆上，
 $[S=j\Omega, -\infty < \Omega < \infty] \rightarrow [|z|=1, -\pi < \omega < \pi]$



②因果稳定的 $H_a(s)$ 应能映射成因果稳定的 $H(z)$ 。为保持滤波器的稳定性， s 平面的左半平面必须映射到 z 平面的单位圆内，即：

$$\text{Re}[s] < 0 \rightarrow |z| < 1$$

为什么？



三、由模拟滤波器设计数字滤波器方法的局限性

- **用这方法设计IIR数字滤波器存在一定的局限性：**
 - 1. 这种方法只适于设计幅度响应分段恒定的滤波器，不能解决任意幅度的滤波器的设计问题。**
 - 2. 它只是一种可行的方法，而不一定是最优的方法。**

四、映射实现的方法

- **由模拟滤波器映射成数字滤波器的方法，也即，数字滤波器能模仿滤波器的特性。**

主要有以下3种映射方法：

- **冲激响应不变法**
- **阶跃响应不变法（不学习）**
- **双线性变换法**

6.5 冲激响应不变法

又称脉冲响应不变法

- 一. 变换原理
- 二. 混叠失真
- 三. 数字化方法
- 四. 优缺点

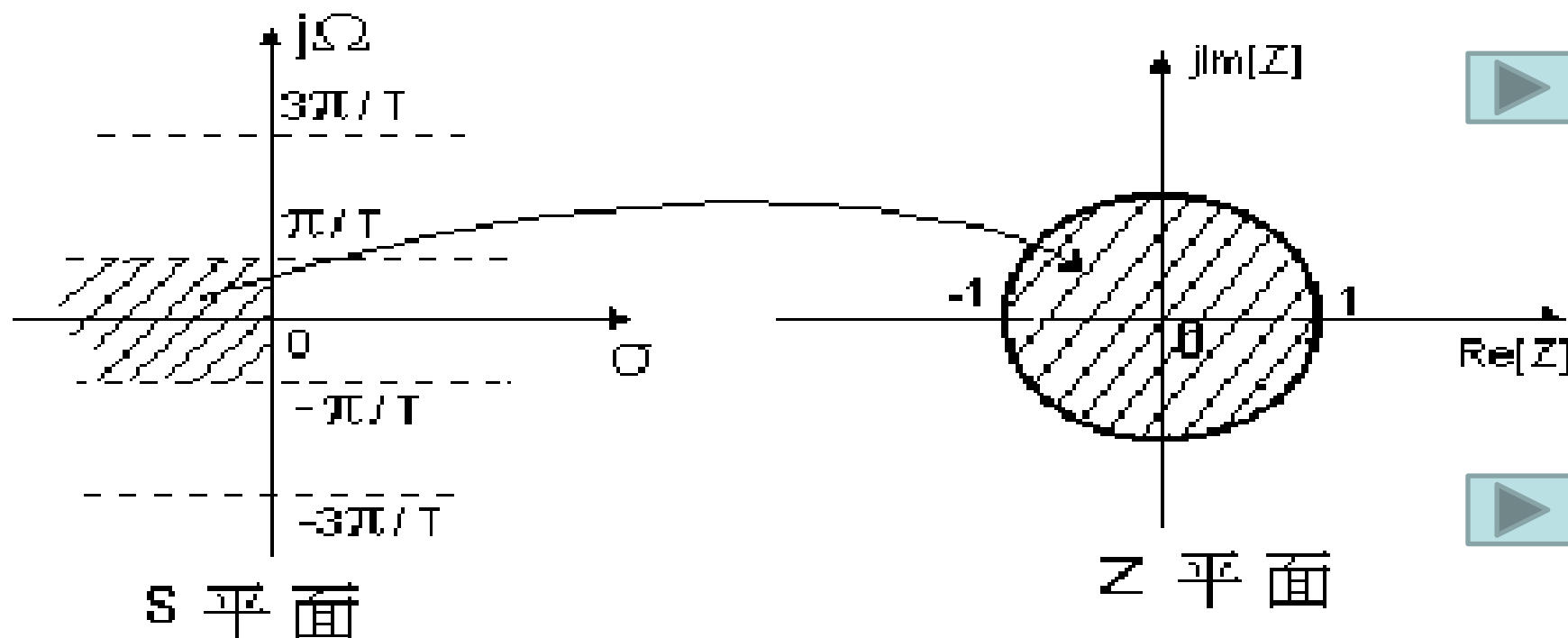
一、变换原理

- 冲激响应不变法就是使数字滤波器的单位冲激（脉冲）响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 。
- 将模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 以等间隔 T 进行抽样，得到数字滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ 。

$$h(n) = h_a(nT)$$

- 时域逼近性能良好

- 冲激响应不变法将模拟滤波器的 s 平面映射到数字滤波器的 z 平面，其变换为： $z = e^{sT}$



冲激响应不变法映射关系

映射规则的要点

- **s平面上每一条宽为 $\frac{2\pi}{T}$ 的横带部分，将重叠映射到z平面的整个平面上。**
- **每一横条的左半边映射到z平面单位圆内，每一横条的右半边映射到z平面单位圆外。**
- **s平面的虚轴($j\Omega$)轴映射到z平面单位圆上，虚轴上每一段长为 $\frac{2\pi}{T}$ 的线段都映射到z平面单位圆上一周。**

- 数字滤波器的系统函数与模拟滤波器的系统函数之间的关系为：

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j \frac{2\pi}{T} k\right)$$



- 数字滤波器的系统函数是模拟滤波器的系统函数以抽样角频率为周期的周期延拓叠加。
- 冲击响应不变法并不是从**s**平面到**z**平面的一一对应的代数映射关系，而是一个多值映射关系。



二、混叠失真

- 数字滤波器的频率响应是模拟滤波器的频率响应的周期延拓之和（抽样定理）

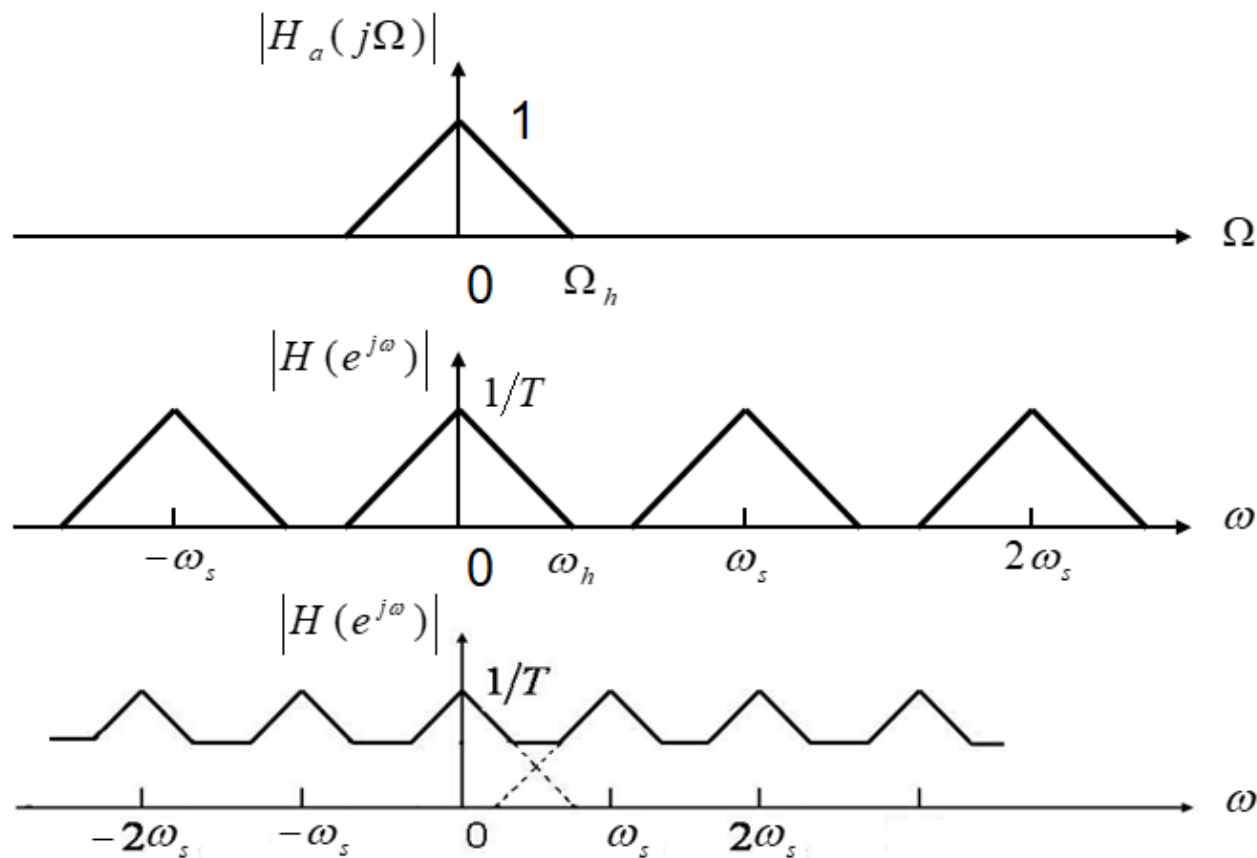



$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

- 当模拟滤波器的频率响应是带限的，即在折叠频率之内，则数字滤波器的频率响应在折叠频率之内，重现模拟滤波器的频率响应，而不产生频率混叠失真。

即要求, $h_a(j\Omega)=0$ 当 $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$

有, $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), \quad |\omega| < \pi$



- 当模拟滤波器的频带是有限的，则采用冲激响应不变法不会产生频率混叠失真现象。
- 故冲激响应不变法适合设计**数字低通滤波器、带通滤波器**，不适合设计**数字高通滤波器、带阻滤波器**。
- 但是，任何一个实际的模拟滤波器的频率响应都不是严格带限的，因此，变换后就会产生周期延拓，形成频率响应的混叠失真。
- 若模拟滤波器的频率响应在折叠频率内衰减越大、越快，则混叠失真越小。
- 抽样频率越大，即抽样时间间隔越小，可以减少频率响应的混叠失真。

三、模拟滤波器的数字化方法

- 由模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 求数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的一般步骤

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT) \rightarrow H(z)$$

- 一般情况下，过程很复杂。
- 但对于能用部分方式表达的模拟滤波器的系统函数，可以采用较为简单的方法。

假设

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

其单位冲激响应为，

$$h_a(t) = L^{-1}[H_a(s)] = \sum_{k=0}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

其中， $u(t)$ 是单位阶跃函数。

- 冲激响应不变法，要求数字滤波器的单位抽样响应等于 $h_a(t)$ 的抽样，

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u(n) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n)$$

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n T} u(n)$$

对 $h(n)$ 求 z 变换，得到数字滤波器的系统函数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T} z^{-1})^n \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\left| e^{s_k T} z^{-1} \right| < 1, \quad \Rightarrow \quad |z| > \left| e^{s_k T} \right|$$

比较 $H_a(s)$ 和 $H(z)$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

① s 平面的单极点 $s = s_k$ 变换到 z 平面的单极点

$$z = e^{s_k T}$$

由映射 $z = e^{sT}$ 直接得到

② $H_a(s)$ 和 $H(z)$ 的部分方式的系数是相同的，
都是 A_k

- ③ 如果模拟滤波器是因果稳定的，故所有的极点都在 s 平面的左半平面，即极点的实部小于零。则按照 $z = e^{sT}$ 变换后的数字滤波器的全部极点在单位圆内，即 $|e^{s_k T}| = e^{\text{Re}[s_k]T} < 1$ ，故数字滤波器是因果稳定的。
- ④ 数字滤波器的零点与模拟滤波器的零点没有任何对应关系！

因为,
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), \quad |\omega| < \pi$$



即, 数字滤波器的频率响应与抽样间隔 T 成反比。当抽样频率很高, 则 T 很小, 滤波器的增益很大, 容易产生误差。

• 故, 做修正
$$h(n) = T \bullet h_a(nT)$$



则,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k) \approx H_a(j\frac{\omega}{T}), \quad |\omega| < \pi$$

例题，设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$



试用冲激响应不变法，设计**IIR**数字滤波器。

解：直接代入公式，



$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} = \frac{Tz^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1 - z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + z^{-2}e^{-4T}}$$

设 $T=1$ ，有

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

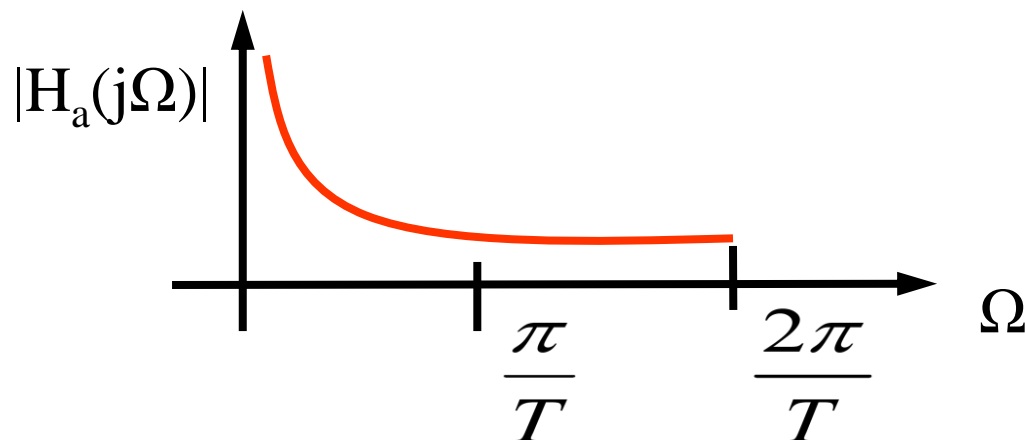
模拟滤波器的频率响应和数字滤波器的频率响应

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$

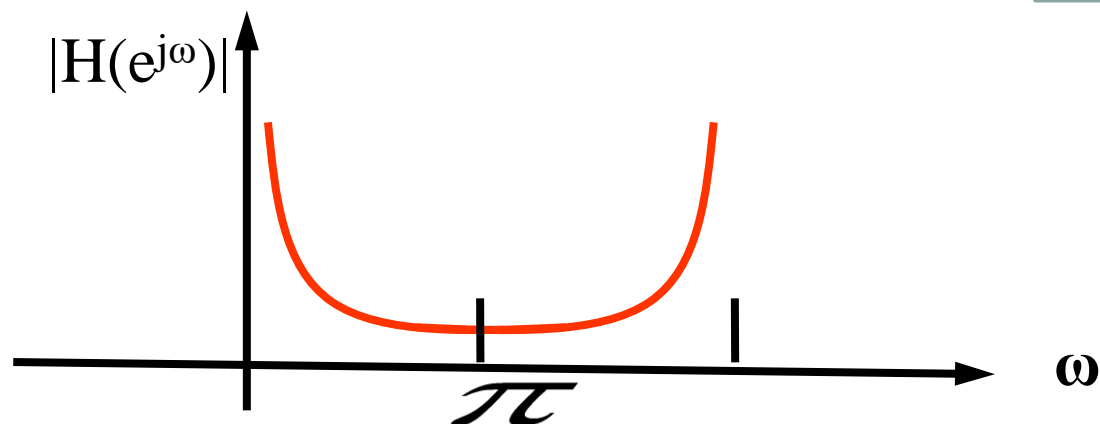
$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.318e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-j2\omega}}$$



模拟滤波器幅度谱



数字滤波器幅度谱



由于模拟滤波器不是充分限带，所以数字滤波器产生很大的频谱混叠失真。

四、优缺点

- 优点

- 数字滤波器的冲激响应完全模仿模拟滤波器的冲激响应，时域逼近性能良好。

- 数字频率和模拟频率呈线性关系 $\omega = \Omega T$

- 缺点

- 有频率混叠现象

- 适用范围

- 带限的模拟滤波器（低通、带通）

- 不适合高通、带阻滤波器