第 三 章

离散傅里叶变换

主 要 内 容

3.1 傅里叶变换的四种形式

3.2 周期序列的傅里叶变换

3.3 离散傅里叶变换

3.4 离散傅里叶变换的性质

3.5 频域抽样理论

3.6 DFT应用

3.1 傅里叶变换的四种形式

傅里叶变换是将一个信号从时域分析变换到频域进行分析处理的一种变换。

傅里叶变换的四种形式（时间频率取连续离散值）

1. 连续时间、连续频率 —傅里叶变换
2. 连续时间、离散频率 —傅里叶级数（变换）
3. 离散时间、连续频率 —序列的傅里叶变换
4. 离散时间、离散频率 —离散傅里叶变换

3.1.1　连续时间、连续频率——傅里叶变换（FT）

连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换

$X(j\Omega)$ 之间的关系：　$X(j\Omega)=FT[x(t)]$

正变换

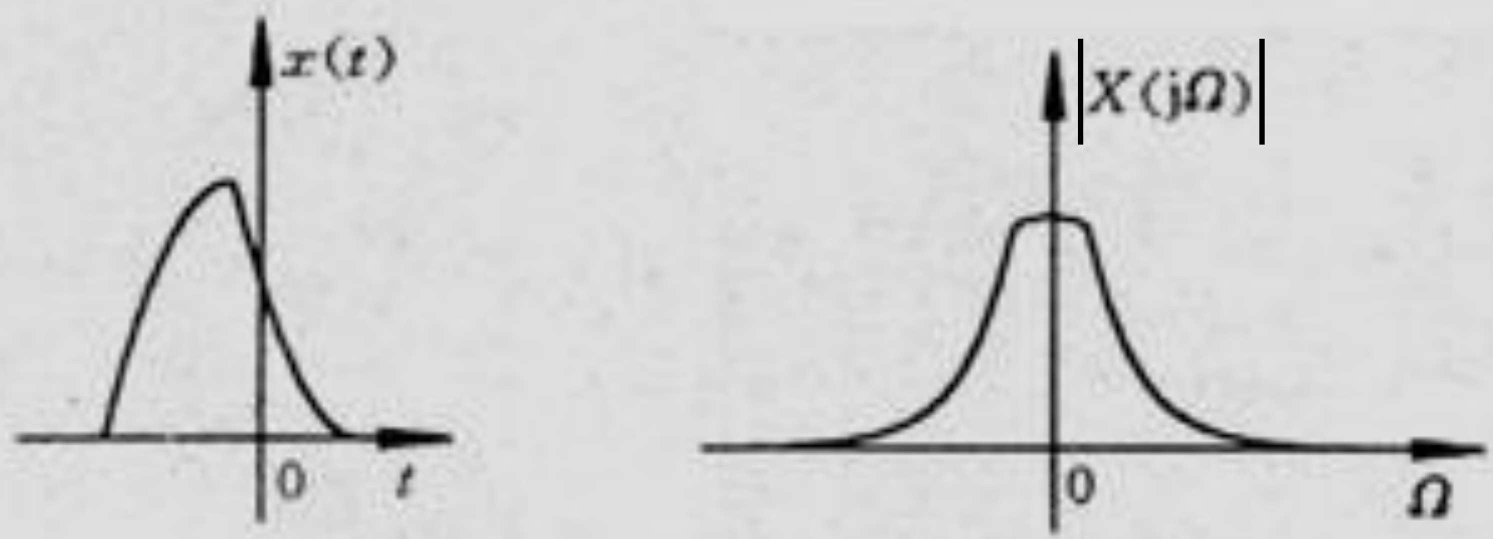
$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

时域连续时间函数对应于频域非周期频谱，

时域非周期性对应于频域连续的谱函数；



(FT)

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}dt$$

3.1.2　连续时间、离散频率
——傅里叶级数（FS）

连续时间周期信号 $x(t)$ 可以展开为傅里叶级数，其傅里叶系数 $X(jk\Omega_0)$ 与 $x(t)$ 之间的关系为：

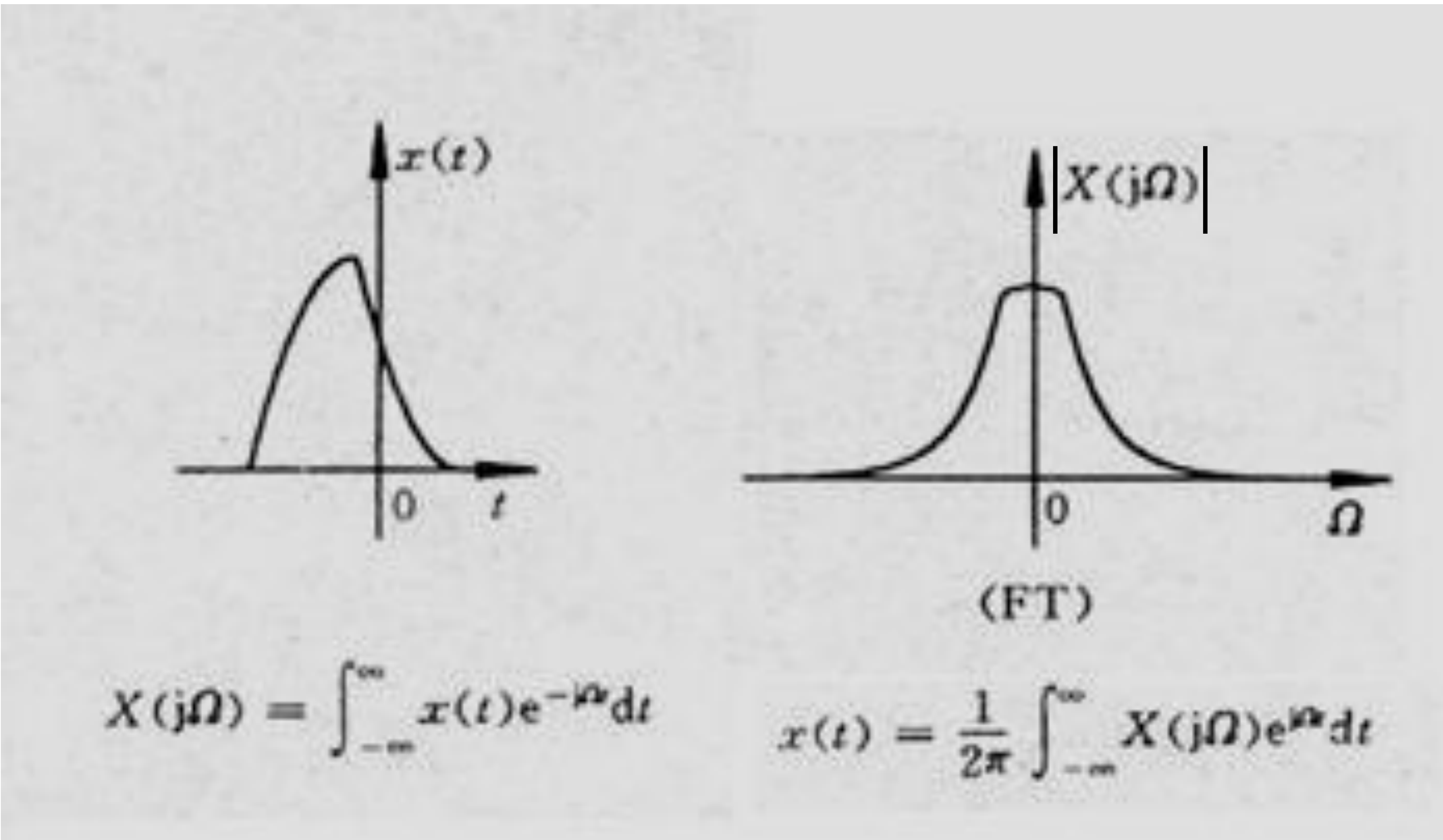
傅里叶系数 $$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

傅里叶级数 $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$\Omega_0 = 2\pi / T_0$　基频　　$k\Omega_0$　谐波分量

时域连续时间函数对应于频域非周期频谱，

时域周期性对应于频域离散的谱函数；



3.1.3 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换（DTFT）

离散时间信号 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系为：

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T}$$

$$x(nT) = \frac{1}{\Omega_s}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} X(e^{j\Omega T})e^{jn\Omega T}d\Omega$$

数字频率： ω

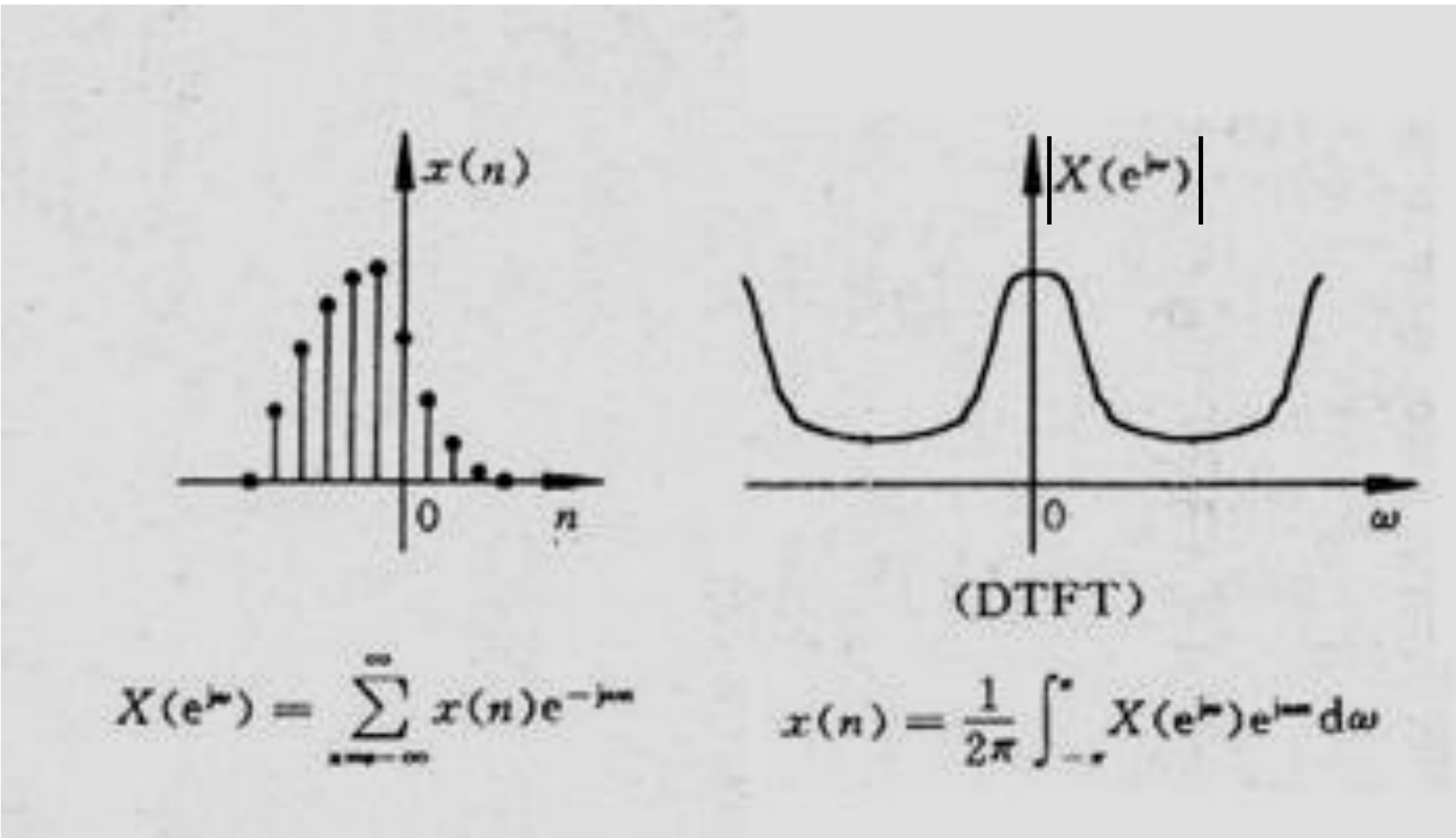
模拟频率： Ω

采样频率： $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega = \Omega T$$

时域的离散化对应于频域的周期延拓，

时域的非周期性对应于频域的连续谱函数；



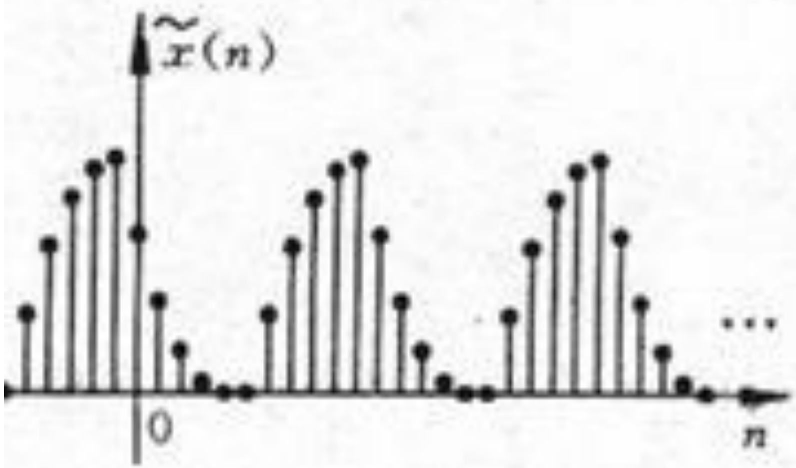
3.1.4 离散时间、离散频率
——离散傅里叶变换（DFT）

按照时间变量和频率变量是连续还是离散的不同组合，

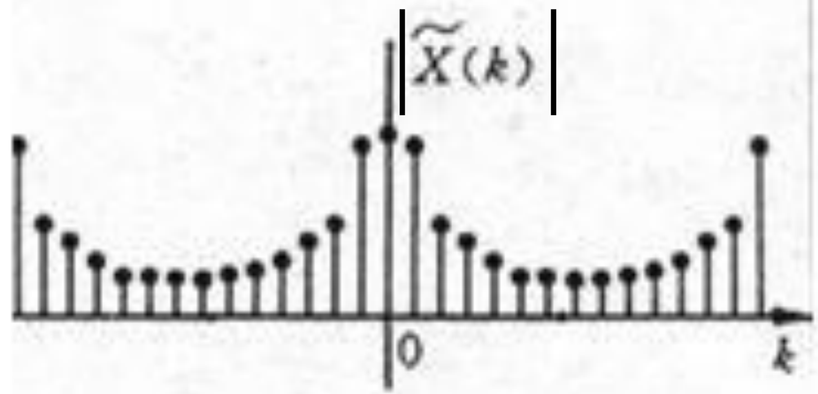
→必存在时间变量和频率变量都是离散的情况，即离散傅里叶级数变换DFS。

→即：时域是离散的周期序列，对应的频域也是离散和周期的。

→特例：时域和频域均取有限长N点，则为离散傅里叶变换DFT



$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



(DFS)

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

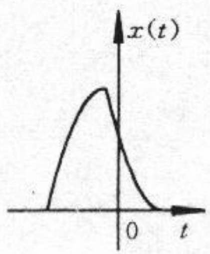
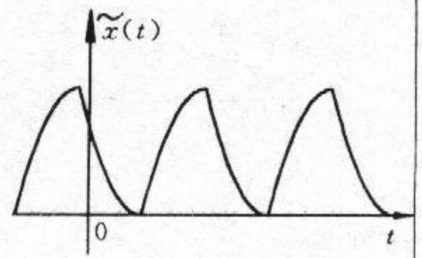
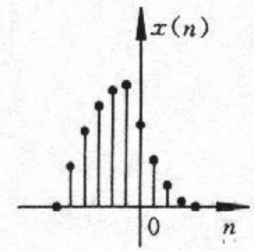
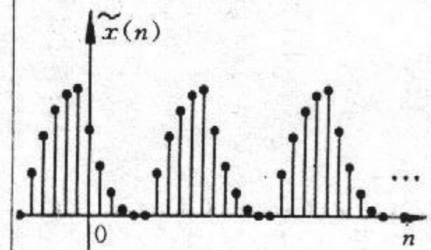
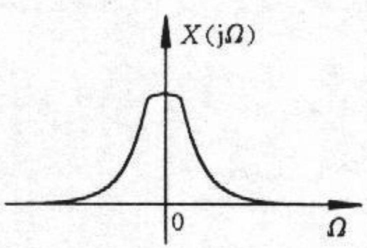
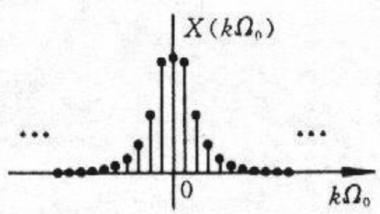
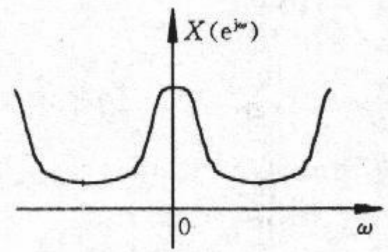
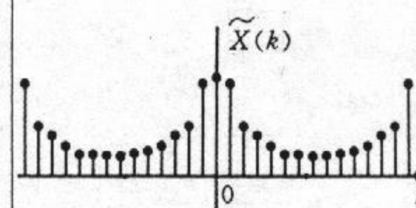
时域离散时间对应于频域周期的频谱，

时域周期性对应于频域离散的谱函数；

四种傅里叶变换的形式

变换类型	时间域	频率域
傅里叶变换 **FT**	连续和非周期	非周期和连续
傅里叶级数 **FS**	连续和周期（**T_0**）	非周期和离散 $\left(\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$
序列的傅里叶变换 **DTFT**	离散（**T,** 抽样周期）和非周期	周期 $\left(\Omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$ 和连续
离散傅里叶级数变换 **DFS**	离散(**T**)和周期(**T_0**)	周期 $\left(\Omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$ 和离散 $\left(\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$

四种傅里叶变换

	连续 非周期	连续 周期	离散 非周期	离散 周期
时域	 $X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$	 $X(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$	 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$	 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
频域	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}dt$  (FT)	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$  (FS)	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$  (DTFT)	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$  (DFS)
	连续 非周期	离散 非周期	连续 周期	离散 周期

3.2 周期序列的离散傅里叶级数

Discrete Fourier Sequences （DFS）

3.2.1 DFS的定义

周期序列满足，

$$x(n) = x(n + rN) \qquad \textbf{r 是任意整数}$$

可写作， $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$

其中，“～”表示周期性，读作**tilde**

如何对 $\tilde{x}(n)$ 作频谱分析 ?

- 因为 $\tilde{x}(n)$ 是离散的，故频谱是周期的；
- 因为 $\tilde{x}(n)$ 是周期的，故频谱是离散的；
- 即：$\tilde{x}(n)$ 的频谱应是离散的、周期的。
- 但：$\tilde{x}(n)$ 是功率信号，不能直接求**DTFT**；

  也即，周期序列不是绝对可和的，因此，

  其 **z** 变换不存在。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\tilde{x}(n)\right| \left|z\right|^{n} = \infty$$

- 但在一个周期内，$\tilde{x}(n)$ 的 **z** 变换存在

- 连续时间周期信号可以用傅里叶级数表示

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

- 周期序列信号同样可以用离散傅里叶级数表示。

	周期	基频	基频序列	k次谐波序列
连续周期	T_0	$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	$e^{j\Omega_0 t}=e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	N	$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$	$e^{j\omega_0 n}=e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

FS: $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$

离散、周期

离散化

$$\Omega_0=2\pi/T_0$$

$$t=nT$$

$$T_0=NT$$

$$\Omega_0=2\pi/NT$$

$$e^{jk\Omega_0 t}$$

$$e^{jk\frac{2\pi}{NT}nT}$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$\tilde{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}(nT)=\tilde{x}(n)$

离散、周期

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 T}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$\tilde{X}(k\Omega_0)$ → 离散、周期（Ω_s）

周期： $\Omega_s = 2\pi / T = 2\pi N / T_0 = N\Omega_0$

离散傅里叶级数的谐波成分只有N个独立成分。

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$ r为任意整数

而 $\tilde{X}(k\Omega_0)$ 也是周期函数

故， $\tilde{x}(n)$ 可展开为N个分量的离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\tilde{X}(k)$ 为k次谐波的系数，也称作 $\tilde{x}(n)$ 的频谱

如何求解 $\tilde{X}(k)$?

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N}\bullet\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \frac{1}{N}\bullet\frac{1-e^{j2\pi r}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}r}}$$

$$= \begin{cases} 1, & r = mN, m\text{为任意整数} \\ 0, & \text{其他r} \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right] = \tilde{X}(r)$$

将r换成k，即为 $$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

该式就是计算一个周期内的谐波系数 $\widetilde{X}(k)$

$\widetilde{X}(k)$ 为周期函数，周期为N

$$\because \tilde{X}(k+mN) \quad =\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j2\pi mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\tilde{X}(k)$$

$\tilde{x}(nT)=\tilde{x}(n)$ 是周期的，周期是 N ，间隔是 T

$\tilde{X}(k\Omega_0)=\tilde{X}(k)$ 是周期的，周期是 N ，间隔是 Ω_0

所以，求和各取一个周期，有：

$$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\,, \quad -\infty<k<\infty$$

$$\widetilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad -\infty<n<\infty$$

此即DFS与IDFS计算公式

采用记号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

傅里叶级数（正）变换（DFS）

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, W_N^{nk}$$

傅里叶级数反变换（IDFS）

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, W_N^{-nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$ 的性质

1、共轭对称性 $W_N^n = \left(W_N^{-n}\right)^*$

2、周期性 $W_N^n = W_N^{n+iN}$， $i \in Z$

3、可约性 $W_{Nm}^{nm} = W_N^n$

4、正交性

$i \in Z$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{kn}\left(W_N^{km}\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(n-m)} = \begin{cases} 1, & n-m = iN \\ 0, & n-m \neq iN \end{cases}$$

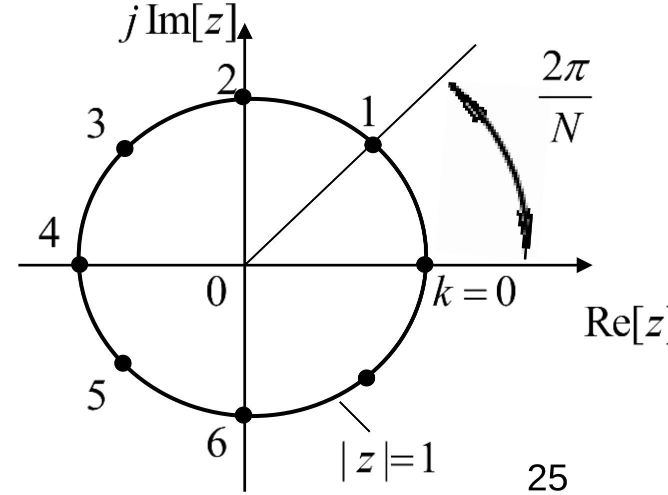
周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作z变换，然后将z变换 $X(z)$ 在z平面的单位圆上作等间隔 $\frac{2\pi}{N}$ 抽样得到。

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & else\ \ n\end{cases}$$

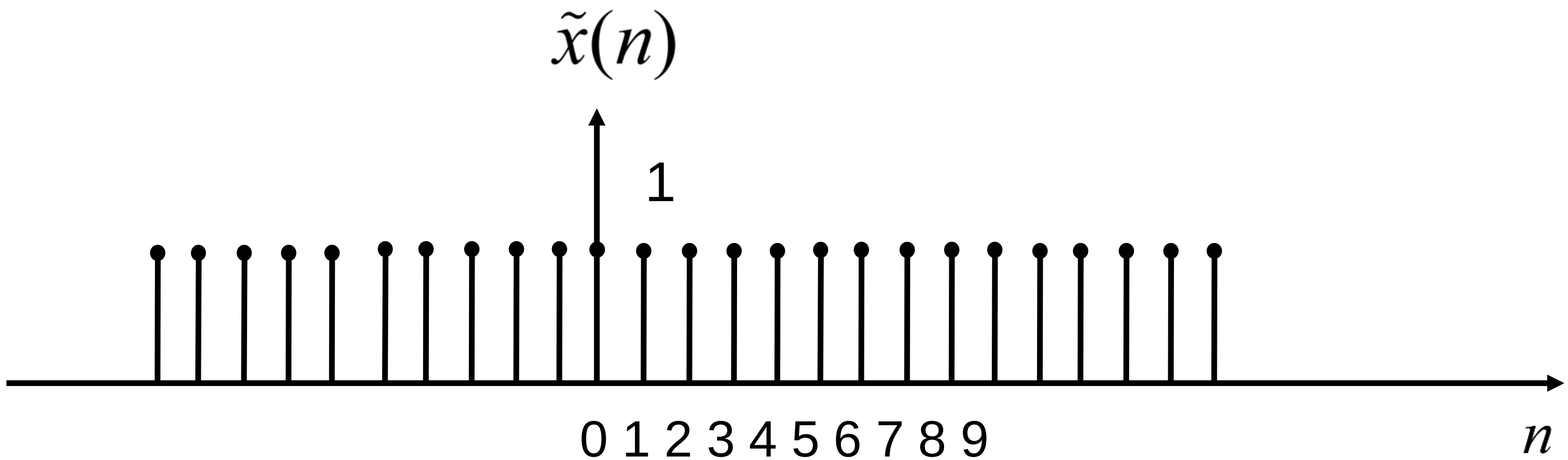
其z变换为： $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,z^{-n}$$

当 $z=W_N^{-k}$ 时，两者相等

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\,W_N^{nk}$$



例题3.1：如图是N=5的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，一个周期表示为 $x(n)=R_5(n)$ ， 求 $\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]$



解： $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数为

$$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{4}\tilde{x}(n)W_5^{nk}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\frac{2\pi}{5}kn}$$

$$=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j2\pi k/5}}=\frac{e^{-j\pi k}\left(e^{j\pi k}-e^{-j\pi k}\right)}{e^{-j\pi k/5}\left(e^{j\pi k/5}-e^{-j\pi k/5}\right)}$$

$$=e^{-j4\pi k/5}\frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/5)}$$

$$\left|\tilde{X}(k)\right|R_5(k)=\begin{cases}5, & k=0\\ 0, & k=1,2,3,4\end{cases}$$

幅度谱如图3-1所示 （P116）

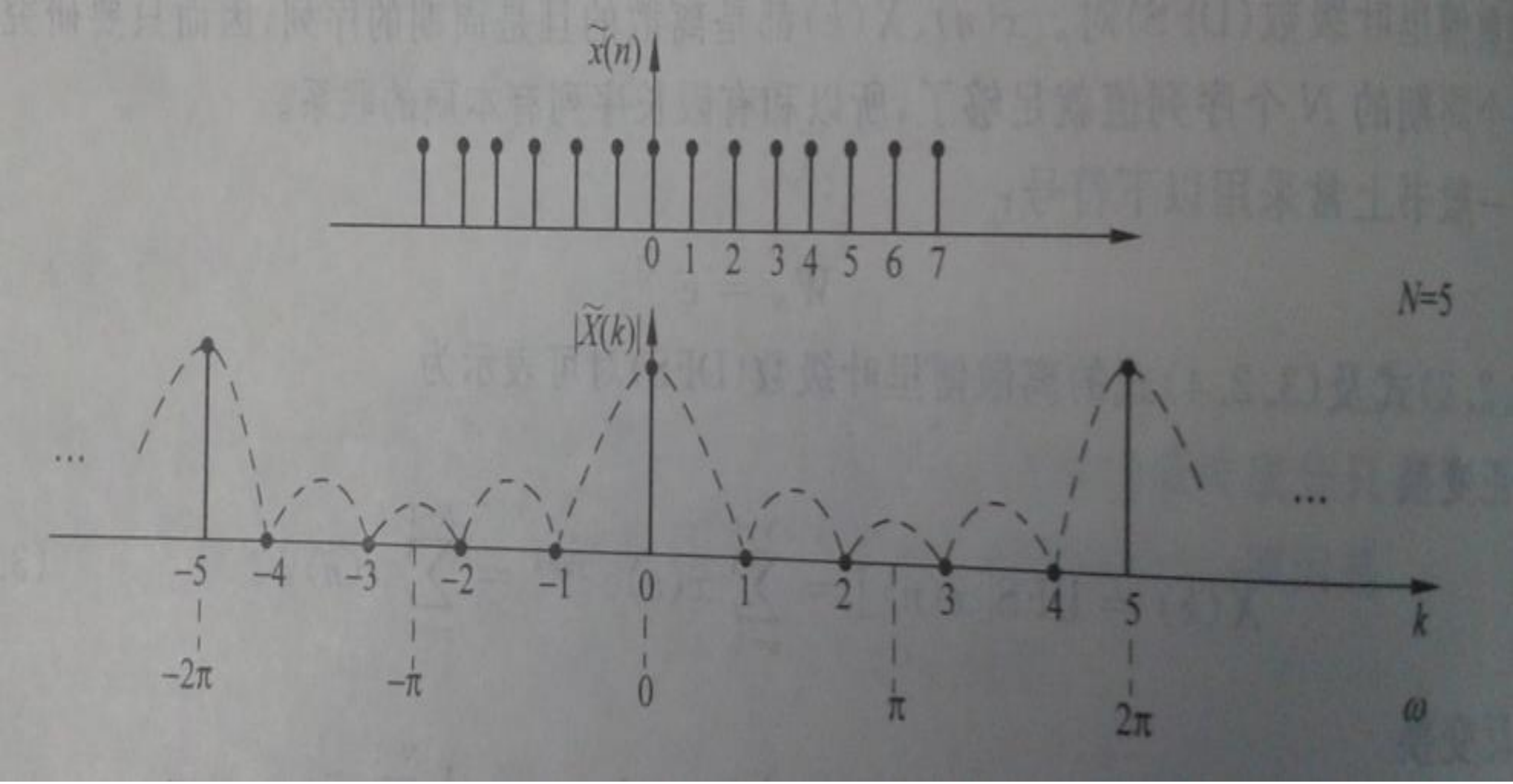
$\tilde{x}(n)$ 的一个周期的有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}x(n)\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

比较：将 $\omega=2\pi k/5$ ($\omega=2\pi k/N$) 代入，两式相同。

如图3-1 （P116）所示。

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作z变换，然后将z变换在z平面的单位圆上作等间隔 $\frac{2\pi}{N}$ 抽样得到。

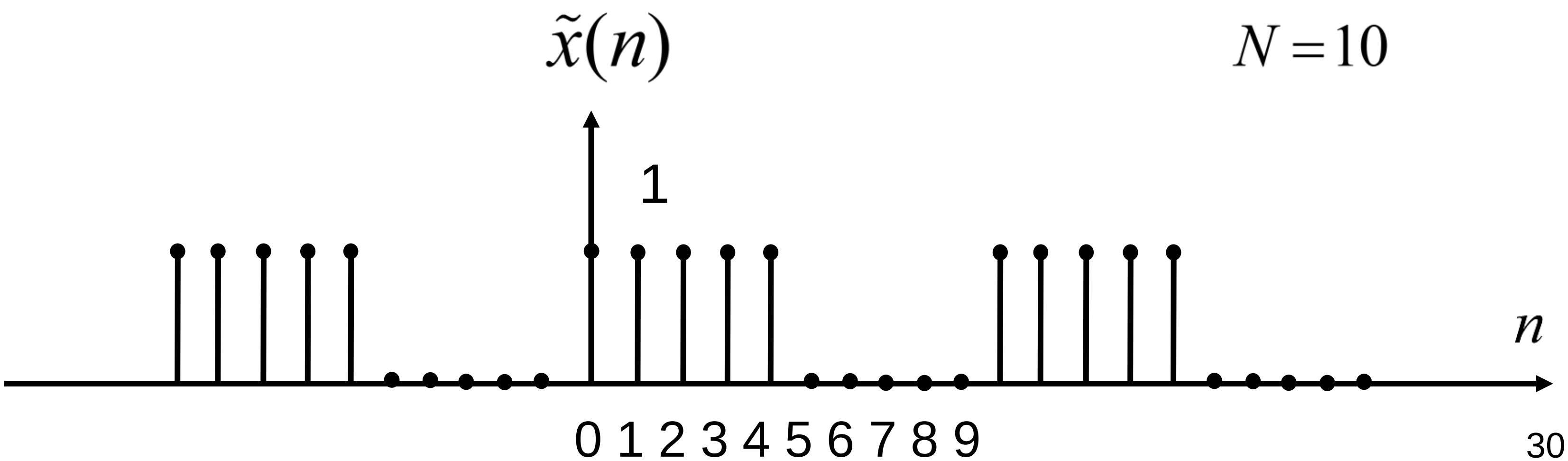


$\tilde{x}(n)$
0 1 2 3 4 5 6 7
N=5
$|\tilde{X}(k)|$
…
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
k
−2π −π 0 π 2π
ω

例题2：如图是N=10的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，一个周期表示为

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & 5\le n\le 9\end{cases}$$

试讨论 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系。



解： $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数为

$$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{9}\tilde{x}(n)\,W_{10}^{nk}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\pi k/5}}=\frac{e^{-j\pi k/2}\left(e^{j\pi k/2}-e^{-j\pi k/2}\right)}{e^{-j\pi k/10}\left(e^{j\pi k/10}-e^{-j\pi k/10}\right)}$$

$$=e^{-j2\pi k/5}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

幅度谱和相位谱如图3-2 (b)(c)所示 （P117）

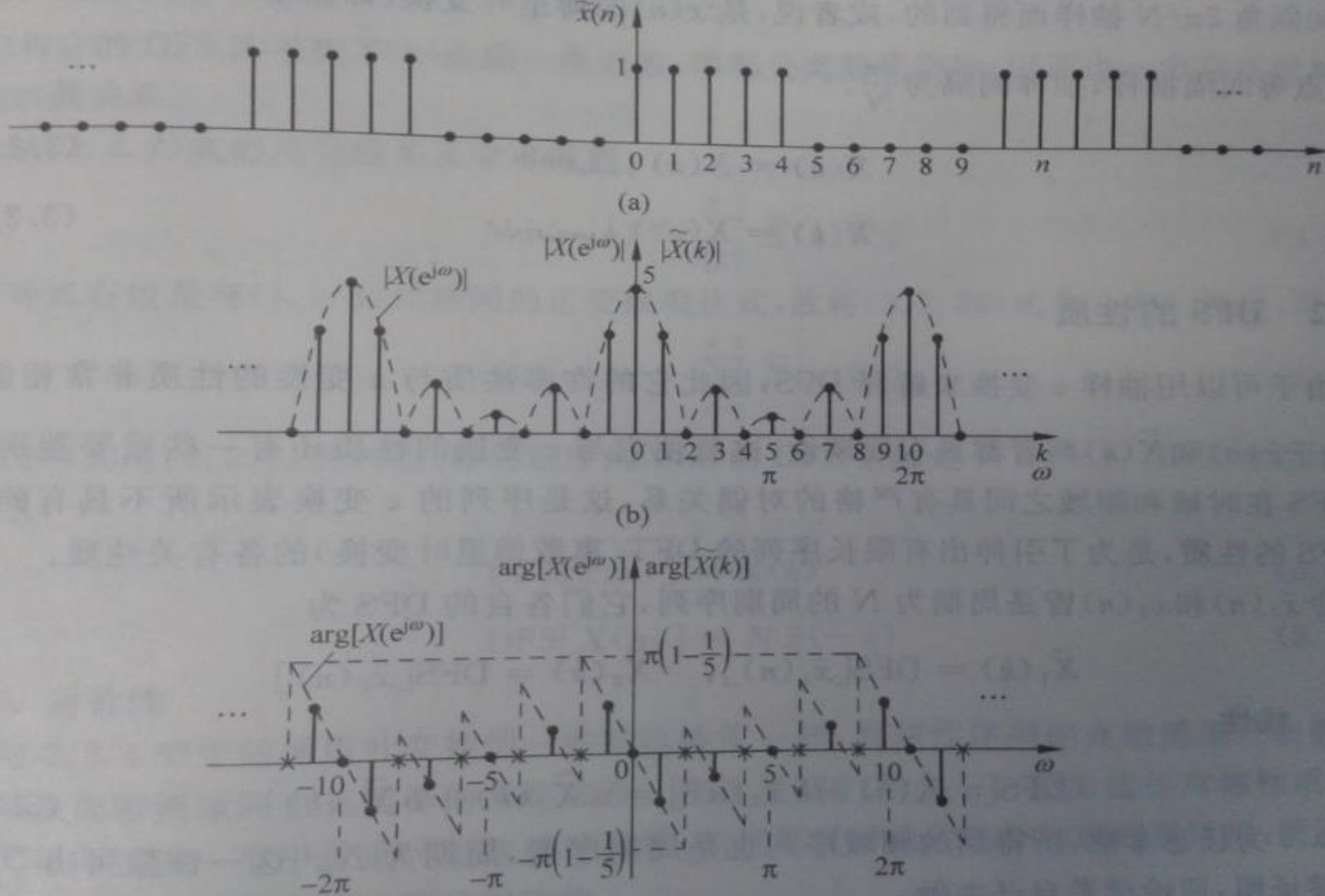
$\tilde{x}(n)$ 的一个周期的有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{9}x(n)\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}\;=e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

比较：将 $\omega=2\pi k/10$ ($\omega=2\pi k/N$) 代入，两式相同。

如图3-2（P117）所示。

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作z变换，然后将z变换在z平面的单位圆上作等间隔 $\frac{2\pi}{N}$ 抽样得到。



x̃(n)
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
n
|X(e^{jω})|
|X̃(k)|
5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
π
2π
k
ω
arg[X(e^{jω})]
arg[X̃(k)]
π(1−1/5)
−π(1−1/5)
−10
−5
0
5
10
−2π
−π
π
2π
ω

(a)

(b)

(c)

3.2.2 离散傅里叶级数的性质

DFS的许多性质和 **z**变换的性质非常相似，但由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的周期性，使得**DFS**在时域、频域之间具有严格的对偶关系。

$$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]$$

$$\tilde{X}_1(k)=DFS\left[\tilde{x}_1(n)\right]$$

周期均为N

$$\tilde{X}_2(k)=DFS\left[\tilde{x}_2(n)\right]$$

一、线性

$$DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

其中，**a**，**b**为任意常数，其**DFS**也是周期为**N**的周期序列

证明：

$$DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]W_N^{nk}$$

$$=a\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_1(n)W_N^{nk}+b\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n)W_N^{nk}$$

$$=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

二、序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

证明：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)\,W_N^{nk}$$

$$= \sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)\,W_N^{ik}\;W_N^{-mk} \qquad (i = n+m)$$

由于 $\tilde{x}(n)$ 及 W_N^{ki} 都是以N为周期的函数

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)\,W_N^{ik} = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

三、调制特性

$$DFS\left[W_N^{nl}\tilde{x}(n)\right]=\tilde{X}(k+l)$$

证明：

$$DFS\left[W_N^{nl}\ \tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nl}x(n)\,W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,W_N^{(k+l)n}$$

$$=\tilde{X}(k+l)$$

四、周期卷积和

如果 $$\widetilde{Y}(k)=\widetilde{X}_1(k)\bullet\widetilde{X}_2(k)$$

则 $$\tilde{y}(n)=\mathrm{IDFS}\left[\tilde{Y}(k)\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

证明

$$\tilde{y}(n)=IDFS\left[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

代入 $$\tilde{X}_1(k)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{mk}$$

$$\tilde{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

同理 $$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

注意：$\widetilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\widetilde{x}_1(m)\widetilde{x}_2(n-m)$ 是一个卷积公式

称作：周期卷积。

周期卷积的求解方法与非周期序列的线性卷积相同。

周期卷积与非周期序列的线性卷积不同点

1. 参与卷积运算的都是周期序列

2. 求和只在一个周期（**m=0, 1, …, N-1**）进行

同理： 时域周期序列的乘积对应着频域周期序列的周期卷积，即若

$$\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{n}) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$$

$$\tilde{Y}(k) = \mathrm{DFS}\left[\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{n})\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l)$$

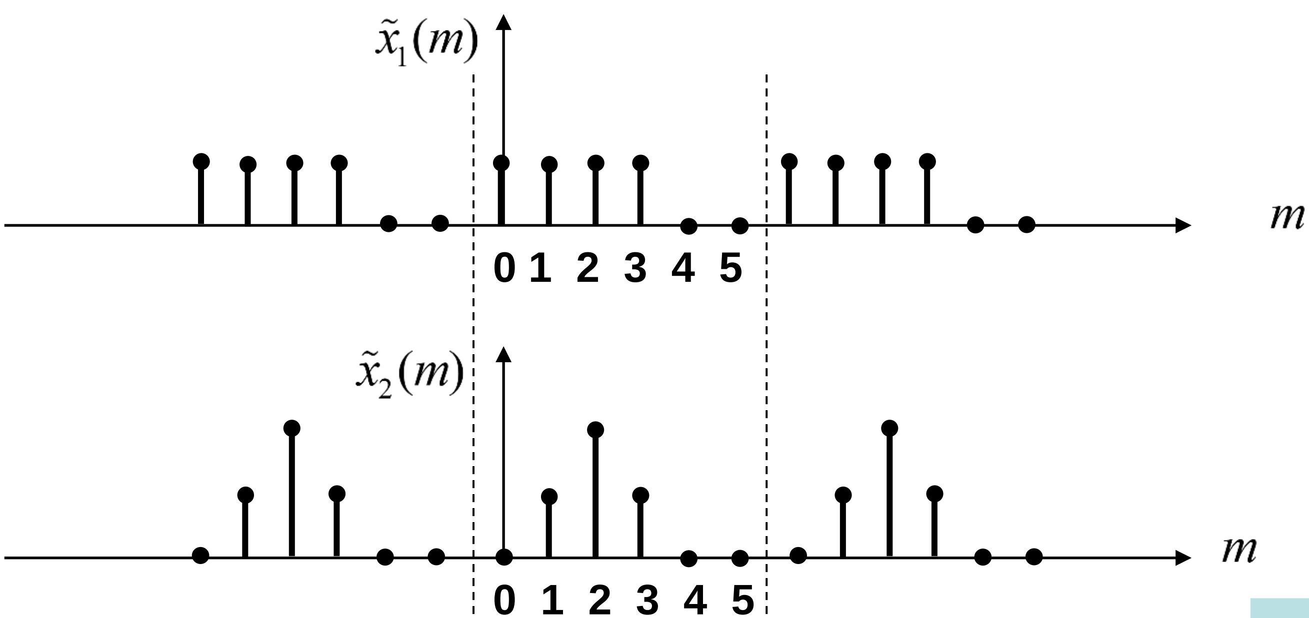
例题：$\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$ 是6点周期序列

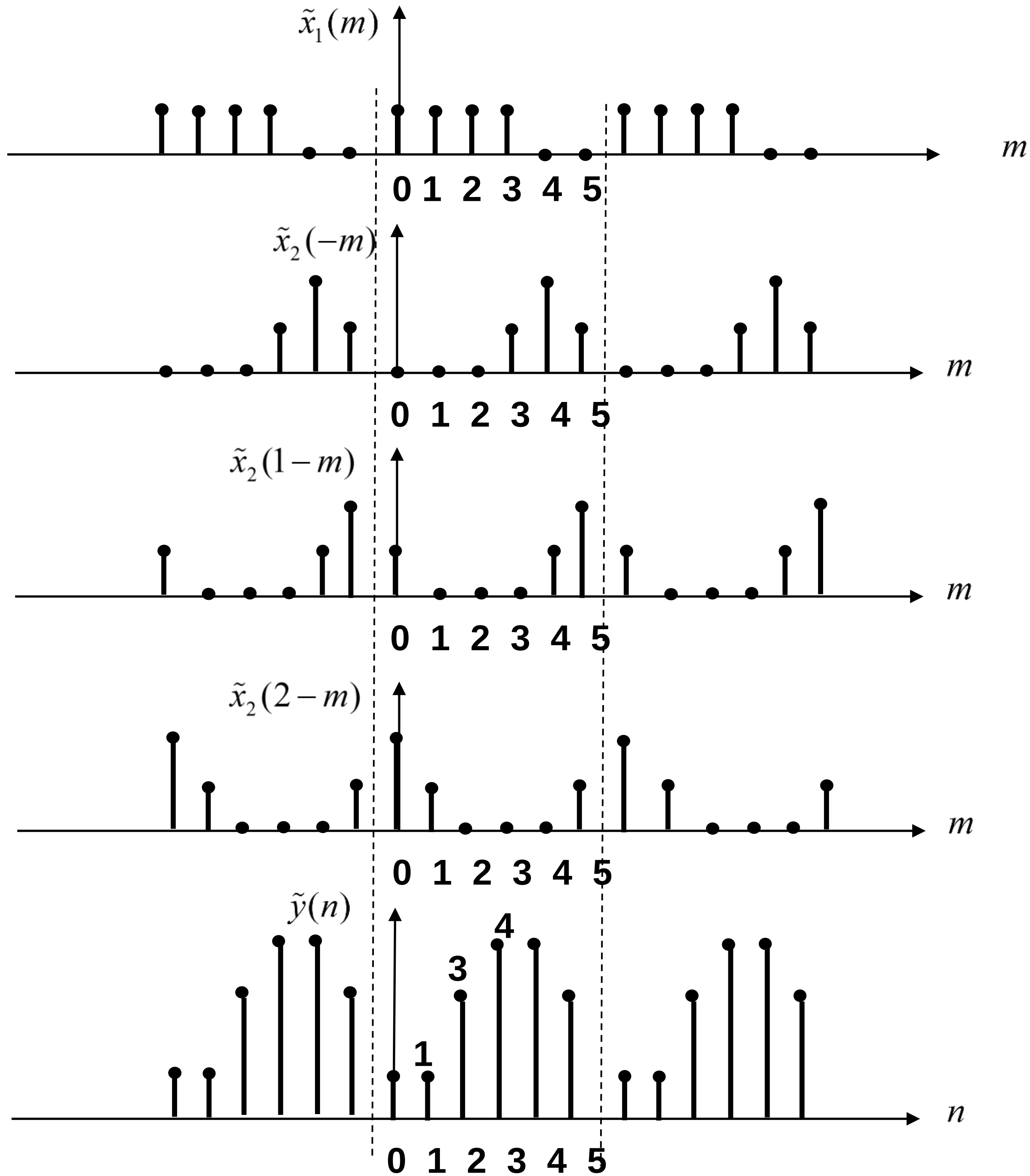
$$\tilde{x}_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{x}_2(n) = \{0, 1, 2, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

求 $\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$ 的周期卷积。

解：




$\tilde{x}_1(m)$
m
0 1 2 3 4 5
$\tilde{x}_2(-m)$
m
0 1 2 3 4 5
$\tilde{x}_2(1-m)$
m
0 1 2 3 4 5
$\tilde{x}_2(2-m)$
m
0 1 2 3 4 5
$\tilde{y}(n)$
4
3
1
n
0 1 2 3 4 5

$$\tilde{x}_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{x}_2(n) = \{0, 1, 2, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{5} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m) \quad , \quad 0 \le n \le 5$$
$$= \{1, 1, 3, 4, 4, 3; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

n	1	1	1	1	0	0	$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)$
0	0	0	0	1	2	1	1
1	1	0	0	0	1	2	1
2	2	1	0	0	0	1	3
3	1	2	1	0	0	0	4
4	0	1	2	1	0	0	4
5	0	0	1	2	1	0	3

线性卷积 $x_1(n) * x_2(n)$

$$x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$x_2(n) = \{0, 1, 2, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$x_1(n) * x_2(n) = \{\underline{0}, 1, 3, 4, 4, 3, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) \neq x_1(n) * x_2(n)$$

3.3 离散傅立叶变换（DFT）

1. 离散傅里叶变换（**Discrete Fourier Transform, DFT**）就是有限长序列的离散频域表示，即有限长序列的离散傅里叶级数。

2. 如何计算有限长序列的傅里叶级数？

3. 将长度为**N**的有限长序列 $x(n)$ 看作是周期为**N**的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期，然后进行计算。

- 将长度为N的有限长序列 $x(n)$ 看作是周期为N的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期，$\tilde{x}(n)$ 看作是 $x(n)$ 以N为周期的周期延拓。

即
$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)\ =x((n))_N$$

- 称 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 **[0, N-1]** 为主值区间；

- 称 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列；

- 由于 $x(n+rN)$ 没有重叠，故可以通过对 $x(n)$ 进行取模运算获得 $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)=x(n\bmod N)=x((n))_N=x(n_1)$$

$$n=n_1+mN,\ 0\le n_1\le N-1,\ m\text{为整数},\ -\infty\le n\le\infty$$

即： n_1 是主值区间的值。

例题： $\tilde{x}(n)$ 是周期为N=9的序列，

求 $\tilde{x}(25), \tilde{x}(-5)$

解：

$$n = 25 = 2\times 9 + 7, \qquad \therefore ((25))_9 = 7$$

$$\tilde{x}(25) = x((25))_9 = x(7);$$

$$n = -5 = (-1)\times 9 + 4, \qquad \therefore ((-5))_9 = 4$$

$$\tilde{x}(-5) = x((-5))_9 = x(4);$$

回忆：矩形序列$\mathbf{R_N(n)}$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其他}\, n\end{cases}$$

故有：

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

同理有：

$$\tilde{X}(k)=X((k))_N$$

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

故，有限长序列的傅里叶级数即为

有限长序列的傅里叶变换

正变换

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,W_N^{nk}=\tilde{X}(k)R_N(k)\,,\qquad k=0,\cdots,N-1$$

反变换

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,W_N^{-nk}=\tilde{x}(n)R_N(n)\,,\qquad n=0,\cdots,N-1$$

称为：离散傅里叶变换对

$$\text{序列 } x(n) \underset{\text{IDFT}}{\overset{\text{DFT}}{\Longleftrightarrow}} \text{序列 } X(k)$$

有限长 $x(n)$ 长度N， $\Rightarrow$ 隐含周期性

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 周期为N

有限长 $X(k)$ 长度N， $\Rightarrow$ 隐含周期性

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 周期为N

3.4 离散傅立叶变换的性质

DFT的性质，和DFS的性质基本一致。包括

1. 线性

2. 序列的圆周移位

3. 对称定理（对偶性）

4. 反转定理

5. 序列的总和

6. 序列的初始值

7. 延长序列的离散傅里叶变换

8. 共轭对称

9. DFT形式下的帕塞瓦定理

10. 圆周卷积和

11. 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

设 $x(n)$，$x_1(n)$，$x_2(n)$ 为有限长序列，有

$$DFT[x(n)] = X(k)$$
$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$
$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

注意：

$x(n)$，$x_1(n)$，$x_2(n)$为有限长序列，长度可以相等，可以不相等。

在周期序列傅立叶级数变换中，长度相等。

一、 线性

设两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，则

$$DFT\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

其中，a,b 为任意常数（实数或复数）。

证明：按照定义即可完成。

问题：两个序列长度问题如何考虑？

讨论：

1. 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 长度都为N，

则 $aX_1(k)+bX_2(k)$ 也是N点序列。

2. 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$长度不相等，设 $x_1(n)$ 为N_1，$x_2(n)$ 为N_2，

则 $ax_1(n)+bx_2(n)$ 应为 $N=\max[N_1,N_2]$

故所有的DFT必须按照 N 点计算。而不能按照 N_1 或者 N_2 进行计算。

例如，若 $N_1 < N_2$ ， 则取 $N = N_2$ ，

将 $x_1(n)$补上 $N_2 - N_1$ 个零，变为 N_2 的序列，然后按照 N_2 点**DFT**进行计算。

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_1(n)\, W_{N_2}^{nk} R_{N_2}(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N_2}nk} R_{N_2}(k)$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n)\, W_{N_2}^{nk} R_{N_2}(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N_2}nk} R_{N_2}(k)$$

$$k = 0, 1, \cdots, N_2 - 1$$

问题：长度增加后 $x_1(n)$ 的频谱是否改变？

二、 序列的圆周（循环）移位

- 序列移位：$x(n-m)$
- 有限长序列如何移位？
- 圆周移位的定义：

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位指用它的长度**N**为周期，进行周期延拓得周期序列 $\tilde{x}(n)$，将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 进行移位，然后取主值区间 **[0, N-1]** 上的序列值。

有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位表示为：

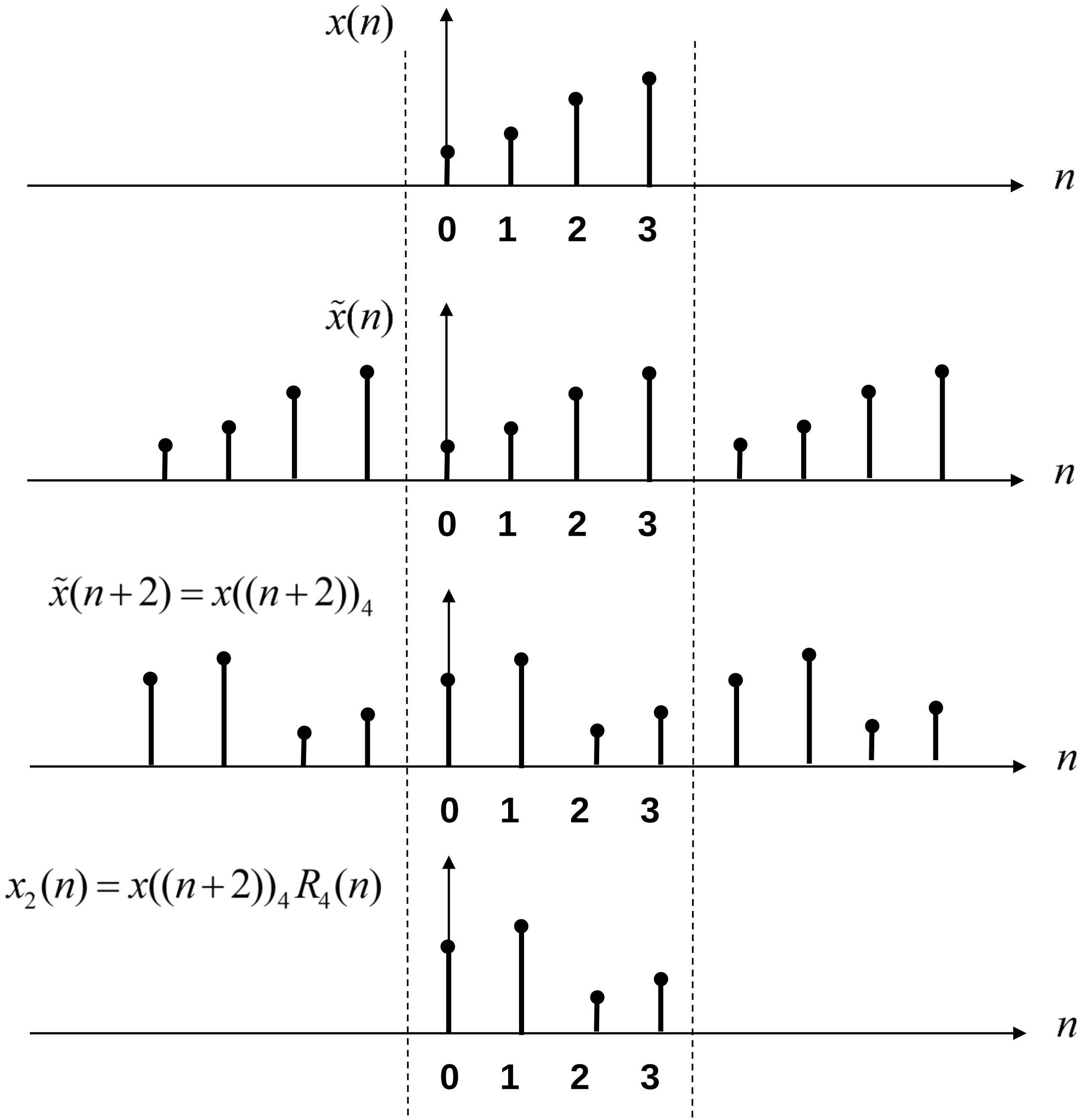
$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

式中， $x((n+m))_N$ 表示 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的**m**位移位（**m>0** 左移，**m<0** 右移）

$R_N(n)$ 表示对此延拓后的周期序列取主值序列。

例题 $x(n) = \{1, 2, 3, 4; n = 0, 1, 2, 3\}$ 求 $x_2(n) = ?$

$$x_2(n) = x((n+2))_4 R_4(n) = \{3, 4, 1, 2; n = 0, 1, 2, 3\}$$


$x(n)$
n
0 1 2 3
$\tilde{x}(n)$
n
0 1 2 3
$\tilde{x}(n+2) = x((n+2))_4$
n
0 1 2 3
$x_2(n) = x((n+2))_4 R_4(n)$
n
0 1 2 3

圆周移位性质：

有限长序列 $x(n), 0 \le n \le N-1$ ，

若 $$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

则 $$X_m(k) = DFT\left[x_m(n)\right]$$
$$= DFT\left[x((n+m))_N R_N(n)\right] = W_N^{-mk} X(k)$$

证明： 采用周期序列的移位性质来证明

$$DFS\left[x((n+m))_N\right]=DFS\left[\widetilde{x}(n+m)\right]=W_N^{-mk}\widetilde{X}(k)$$

利用： $x(n)=\widetilde{x}(n)R_N(n)$ ， $X(k)=\widetilde{X}(k)R_N(k)$

则

$$DFT\left[x((n+m))_N R_N(n)\right]$$

$$=DFT\left[\tilde{x}(n+m)R_N(n)\right]$$

$$=DFS\left[\tilde{x}(n+m)\right]R_N(n)$$

$$=W_N^{-mk}\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$=W_N^{-mk}X(k)$$

对照：序列的傅立叶变换的移位性质

$$DTFT\left[x(n+m)\right]=e^{j\omega m}X(e^{j\omega})$$

指数是正的

原因

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$W_N^{-mk}=e^{j\frac{2\pi mk}{N}}$$

结论

1. 有限长序列的圆周移位，在离散频域中，只引入一个和频率成正比的线性相移：

$$W_N^{-km}=e^{(j\frac{2\pi}{N}k)m}$$

对频谱的幅度没有影响。

2. **X(k)**的圆周移位性质（调制特性）

若 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]$

则 $IDFT\left[X((k+l))_N R_N(n)\right]=W_N^{nl}x(n)=e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}x(n)$

即：时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

利用该性质，可以推导出以下两个式子

$$DFT\left[x(n)\cos(\frac{2\pi nl}{N})\right]=\frac{1}{2}\left[X((k-l))_N+X((k+l))_N\right]R_N(n)$$

$$DFT\left[x(n)\sin(\frac{2\pi nl}{N})\right]=\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N-X((k+l))_N\right]R_N(n)$$

应用：通信中的幅度调制！

有用信息　　载波

三、对偶性（对称定理）

若 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(k)$，则当时间序列具有频谱序列的形状$X(n)$ 时，其对应的离散傅里叶变换为：

$$DFT\left[X(n)\right]=Nx(N-k)$$

证明： $\because X(k)=DFT\left[x(n)\right] \quad \therefore x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$

$$x(N-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-(N-n)k}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{nk}$$ **n, k互换**

$\therefore \quad Nx(\mathrm{N}-k)=\sum_{n=0}^{N-1}X(n)W_N^{nk}$ 即 $DFT\left[X(n)\right]=Nx(N-k)$

四、反转（褶）定理

若 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(k)$，则 $x(\mathrm{N}-n)$ 的离散傅里叶变换对为 $X(\mathrm{N}-k)$

即 $$x(\mathrm{N}-n) \Leftrightarrow X(\mathrm{N}-k)$$

变量置换 $m=-n$

证明：

$$DFT\left[x(N-n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x((-n))_N R_N(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{m=-N+1}^{0}\tilde{x}(m)W_N^{-mk}R_N(m) \quad =\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)W_N^{m(-k)}R_N(m)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(-k)}R_N(m)=\tilde{X}(-k)R_N(k) \ =X(N-k)$$

五、序列的总和

时间序列 $x(n)$ 中各取样值的总和等于其离散傅里叶变换为 $X(k)$ 在 $k=0$ 时的值。

$$X(0)=X(k)\Big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\Big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$$

序列的均值（直流分量）

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=\frac{1}{N}X(0)$$

六、序列的初始值

若 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(k)$，则 $x(n)$ 的初始值 $x(0)$ 为频谱序列各取样值 $X(k)$ 的总和除以N。

$$\because x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

$$\therefore x(0)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)$$

七、延长序列的离散傅里叶变换

序列延长的两种方法：

1. 填充零

   填充零延长到所需长度

2. 拷贝原序列

   拷贝原序列的值至所需长度

实际中常采用第一种方法。

1 填充零至整数倍长度

把序列 $x(n),\ 0 \le n \le N-1$，填充零至长度 rN，得到新序列 $g(n)$，

$$g(n)=\begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le rN-1 \end{cases}$$

则 $g(n)$ 的离散傅里叶变换 $G(k)$

$$G(k)=X\left(\frac{k}{r}\right), \qquad k=0,1,\cdots,rN-1$$

证明：$G(k)=DFT\left[g(n)\right] =\sum_{n=0}^{rN-1} g(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi n\frac{k}{r}}{N}} = X\left(\frac{k}{r}\right)$$

故：$g(n)$ 的离散傅里叶变换（即频谱）$G(k)$ 与 $x(n)$ 的频谱 $X(k)$ 是相对应的，即谱线包络是一样的，只不过$G(k)$ 的频谱间隔比 $X(k)$ 的频谱间隔要小 r 倍，频谱更加细致。

2 填充零至任意长度

把序列 $x(n), \ 0 \le n \le N-1$ ，填充零至长度 $L(L > N)$ ，得到新序列 $g(n)$ ，

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le L-1 \end{cases}$$

则 $g(n)$ 的离散傅里叶变换 $G(k)$

$$G(k) = X\left(\frac{N}{L}k\right), \qquad k = 0, 1, \cdots, L-1$$

证明：

$$G(k)=DFT\left[g(n)\right] =\sum_{n=0}^{L-1}g(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{L}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi n\frac{N}{L}k}{N}} =X\left(\frac{N}{L}k\right)$$

故：$g(n)$ 的离散傅里叶变换（即频谱）$G(k)$ 与 $x(n)$ 的频谱 $X(k)$ 也是相对应的，即谱线包络是一样的，只不过 $G(k)$ 的频谱间隔比 $X(k)$ 的频谱间隔要小 N/L 倍。

3 重复原序列填充至整数倍长度

把序列 $x(n),\ 0 \le n \le N-1$ ，重复原序列填充至长度 rN ，得到新序列 $g(n)$ ，

$$g(n+kN) = x(n), \quad 0 \le n \le N-1, 0 \le k \le r-1$$

则 $g(n)$ 的离散傅里叶变换 $G(k)$

$$G(k) = \left(1 + e^{-j2\pi \frac{1}{r}k} + \cdots + e^{-j2\pi \frac{r-1}{r}k}\right) X\left(\frac{k}{r}\right), \qquad k = 0,1,\cdots,rN-1$$

$$= \begin{cases} rX\left(\dfrac{k}{r}\right) & k\text{能被}r\text{整除时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

证明：

$$G(k)=DFT\left[g(n)\right]=\sum_{n=0}^{rN-1}g(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}+\cdots+\sum_{n=(r-1)N}^{rN-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}$$

第一项：

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi n\frac{k}{r}}{N}}=X(\frac{k}{r})$$

第二项

$$\sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}} \overset{n=N+m}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x(N+m) e^{-j\frac{2\pi(N+m)k}{rN}}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi k}{r}} e^{-j\frac{2\pi mk}{rN}}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{r}} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi m\frac{k}{r}}{N}}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{r}} X(\frac{k}{r})$$

第r项

$$\sum_{n=(r-1)N}^{rN-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{rN}} \overset{n=(r-1)N+m}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x((r-1)N+m)e^{-j\frac{2\pi((r-1)N+m)k}{rN}}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi(r-1)k}{r}} e^{-j\frac{2\pi mk}{rN}}$$

$$=e^{-j\frac{2\pi(r-1)k}{r}} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi m\frac{k}{r}}{N}}$$

$$=e^{-j\frac{2\pi(r-1)k}{r}} X(\frac{k}{r})$$

故：

$$G(k) = X\left(\frac{k}{r}\right) + e^{-j\frac{2\pi k}{r}} X\left(\frac{k}{r}\right) + \cdots + e^{-j\frac{2\pi (r-1) k}{r}} X\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$= \left(1 + e^{-j\frac{2\pi k}{r}} + \cdots + e^{-j\frac{2\pi (r-1) k}{r}}\right) X\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi l k}{r}} X\left(\frac{k}{r}\right)$$

而：

$$\sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi l k}{r}} = \sum_{l=0}^{r-1}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{r}}\right)^{l} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{r}}}$$

$$= \begin{cases} r & if \quad k = lr \quad , l = 0, 1, \ldots \\ 0 & else \end{cases}$$

故：

$$G(k) = \begin{cases} rX\left(\dfrac{k}{r}\right) & k\text{能被}r\text{整除时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

故：$g(n)$ 的离散傅里叶变换（即频谱）$G(k)$ 当 **k** 可以被 **r** 整除时，$G(k)$ 和 $X(k)$ 是对应的，即包络线是一致的，但幅度要增加 **r** 倍；

其它情况，$G(k)$ 的值都为零。

4 重复原序列填充至任意长度

比较复杂，就不讨论了。

综上所述，实际上，都是采用补零操作！

八、 共轭对称性

回忆：

第二章讨论了序列的傅里叶变换，其中定义了：

共轭对称序列 和共轭反对称序列

复数

$$x_e(n)=x_e^*(-n)$$

$$x_o(n)=-x_o^*(-n)$$

实数

$$x_e(n)=x_e(-n)$$ 偶对称

$$x_o(n)=-x_o(-n)$$ 奇对称

性质：任何一个序列都可以表示成共轭对称分量和共轭反对称分量之和。

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]$$

但：对于有限长序列，不能按照此定义计算共轭对称序列和共轭反对称序列。

为什么？

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为N

$$x(n)=\{x(0),x(1),\ \cdots,\ x(N-1)\}$$

则， $$x^*(-n)=\{x^*(-0),x^*(-1),\ \cdots,\ x^*(-N+1)\}$$

按照共轭对称序列的定义

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]$$
$$=\frac{1}{2}[\{x(0),x(1),\ \cdots,\ x(N-1)\}+$$
$$\{x^*(-0),x^*(-1),\ \cdots,\ x^*(-N+1)\}]$$

可以看出，$x_e(n)$ 的长度为2N-1，不是N！

同样，$x_o(n)$ 的长度为2N-1，不是N！

解决方法：

按照有限长序列的周期序列进行计算共轭对称序列和共轭反对称序列，然后取主值序列。此时，长度就是N。

分别称作圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 。

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 和共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 定义为：

$$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right]=\frac{1}{2}\left[x((n))_N+x^*((N-n))_N\right]$$

$$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]=\frac{1}{2}\left[x((n))_N-x^*((N-n))_N\right]$$

满足

$$\tilde{x}_e(n)=\tilde{x}_e^{\ *}(-n)$$

$$\tilde{x}_o(n)=-\tilde{x}_o^{\ *}(-n)$$

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$$

有限长序列 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 定义为：

$$x_{ep}(n)=\widetilde{x}_e(n)R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N+x^*((N-n))_N\right]R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=\widetilde{x}_o(n)R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N-x^*((N-n))_N\right]R_N(n)$$

满足 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$

证明： $\because\ \tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$

$$\therefore\ x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)\ =\left[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)\right]R_N(n)$$

$$=\tilde{x}_e(n)R_N(n)+\tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

$$=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

- 有限长序列的奇对称和偶对称

若序列是奇对称的，　即

$$x(n)=-x(N-n)$$

若序列是偶对称的，即

$$x(n)=x(N-n)$$

例题： $x(n)=\{1, 2, 1, -1, -2; n=0, 1, 2, 3, 4\}$

该序列长度 N = 5, 是奇序列。

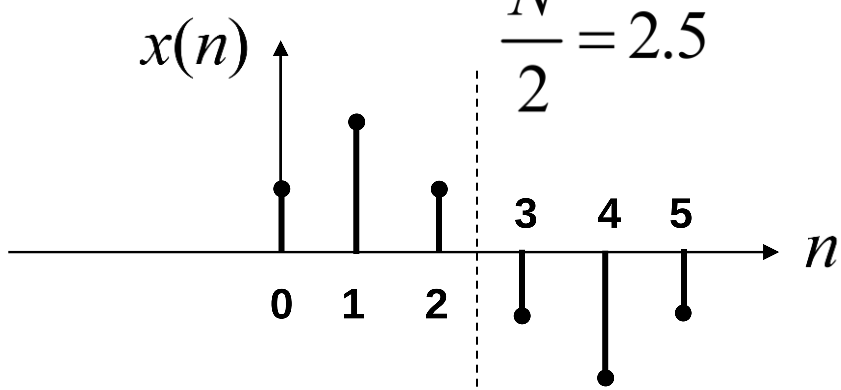
$$\because x(n)=-x(N-n)$$

$$x(0)=-x(5-0)=-x(5)=-(-1)=1$$

$$x(1)=-x(5-1)=-x(4)=-(-2)=2$$

$$x(2)=-x(5-2)=-x(3)=-(-1)=1$$

$$\frac{N}{2}=2.5$$



例题： $x(n)=\{1, 2, 0, -2; n=0, 1, 2, 3\}$

该序列长度 N = 4, 是奇序列。

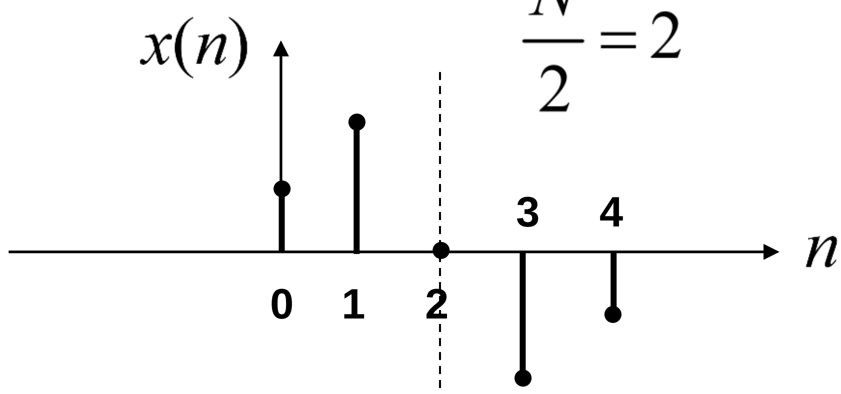
$$\because x(n)=-x(N-n)$$

$$x(0)=-x(4-0)=-x(4)=-(-1)=1$$

$$x(1)=-x(4-1)=-x(3)=-(-2)=2$$

$$x(2)=-x(4-2)=-x(2)=0$$

$$\frac{N}{2}=2$$



例题： $x(n) = \{1, 2, 1, 1, 2; n = 0, 1, 2, 3, 4\}$

该序列长度 N = 5, 是偶序列。

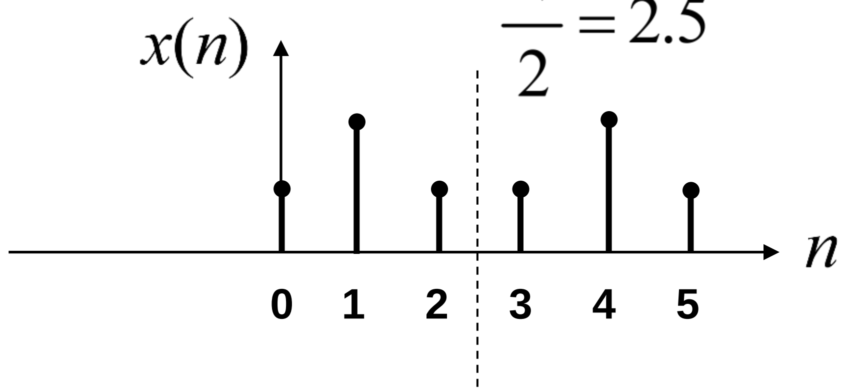
$$\because x(n) = x(N-n)$$

$$x(0) = x(5-0) = x(5) = 1$$

$$x(1) = x(5-1) = x(4) = 2$$

$$x(2) = x(5-2) = x(3) = 1$$

$$\frac{N}{2} = 2.5$$



例题： $x(n)=\{1,2,1,2;\ n=0,1,2,3\}$

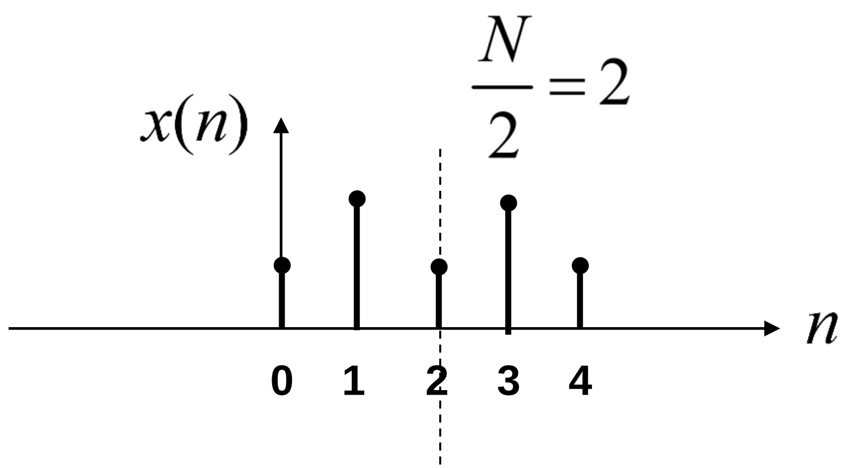
该序列长度 N = 4, 是偶序列。

$$\because x(n)=x(N-n)$$

$$x(0)=x(4-0)=x(4)=1$$

$$x(1)=x(4-1)=x(3)=2$$

$$x(2)=x(4-2)=x(2)=1$$



判断有限长序列对称性的方法

- 对于一个**N**点时实序列

$$\left\{x(n),\ 0 \le n \le N-1\right\}$$

- 判断**x(n)**的对称性简单方法是
  - 将**n=N**处序列值补上**n=0**处的序列值 $x(N)=\pm x(0)$
  - 如果新序列对于**n=N/2**是偶（奇）对称的
  - 则原序列就是偶（奇）对称的
  - 否则，就不是偶（奇）对称的

1　奇对称序列的DFT

若序列是奇对称的，　即

$$x(n) = -x(N-n)$$

则其离散傅里叶变换也是奇对称的。

$$X(k) = -X(N-k)$$

说明：有些书籍定义为：

若序列是奇对称的，　即

$$x(n) = -x(-n) = -x(N-n)$$

存在问题：$x(-n)$　**-n**取值不在主值区间

另外，奇对称序列，有　$x(\mathrm{N}/2) = 0$

证明：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[-x(N-n)\right]W_N^{(N-n)(N-k)}$$

$$=-X(N-k)$$

应用了 $$W_N^{(N-n)(N-k)}=W_N^{N^2}\bullet W_N^{-nN}\bullet W_N^{-kN}\bullet W_N^{nk}$$

$$=W_N^{nk}$$

即，将n=N处补上n=0处相同的序列值的相反数，如果此新的序列对于n=N/2而言，是奇对称的话，则原序列是奇对称的，其离散傅里叶变换也是奇对称的。

注意：N可以为偶数，也可以为奇数。

在实际情况下，一般取偶数，且为

$$N = 2^n$$

2　偶对称序列的DFT

若序列是偶对称的，即

$$x(n) = x(N-n)$$

则其离散傅里叶变换也是偶对称的。

$$X(k) = X(N-k)$$

证明：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(N-n)\right]W_N^{(N-n)(N-k)}$$

$$=X(N-k)$$

应用了 $$W_N^{(N-n)(N-k)}=W_N^{N^2}\bullet W_N^{-nN}\bullet W_N^{-kN}\bullet W_N^{nk}$$

$$=W_N^{nk}$$

即，将**n=N**处补上**n=0**处相同的序列值，如果此新的序列对于**n=N/2**而言，是偶对称的话，则原序列是偶对称的，其离散傅里叶变换也是偶对称的。

注意：**N**可以为偶数，也可以为奇数。在实际情况下，一般取偶数，且为：

$$N = 2^n$$

3 对称性质1：共轭复数的DFT

$$DFT[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$= X^*((N-k))_N R_N(k)$$

式中，$x^*(n)$表示 $x(n)$ 的共轭复序列

证明：

$$DFT\left[x^*(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{n(-k)}\right]^* R_N(k)$$

$$= X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$DFT\left[x^*(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nN} W_N^{-nk}\right]^* R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-(N-k)n}\right]^* R_N(k)$$

应用了 $W_N^{nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j2\pi n} = 1$

$$= X^*((N-k))_N R_N(k)$$

在一些资料中，有如下的写法：

$$DFT\left[x^*(n)\right]=X^*(N-k)$$

为什么？

严格来说，此式在 **k=0**处是不成立的。

但一般我们认为，**X(k)**是具有蕴含的周期性，即**X(N)=X(0)**, 故有如此的写法。

4 对称性质2：

$$DFT\left[x^*((-n))_N R_N(n)\right] = X^*(k)$$

证明：$$DFT\left[x^*((-n))_N R_N(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N R_N(n) W_N^{-nk}\right]^*$$

$$\left[\sum_{n=-(N-1)}^{0} x((n))_N R_N(-n) W_N^{nk}\right]^*$$

做变量置换 m=-n，然后再换回n

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N R_N(n) W_N^{nk}\right]^*$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\right]^* = X^*(k)$$

5 对称性质3：序列实部的DFT

$$DFT\left\{\mathrm{Re}\left[x(n)\right]\right\} = X_{ep}(k)$$

$$= \frac{1}{2}\left[X((k))_N + X^*((N-k))_N\right]R_N(k)$$

即，复序列的实部的DFT等于序列的DFT的圆周共轭对称分量。

证明：

$$DFT\left\{\mathrm{Re}\left[x(n)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right] + DFT\left[x^*(n)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[X((k))_N + X^*((N-k))_N\right]R_N(k) \quad = X_{ep}(k)$$

6 对称性质4：序列虚部的DFT

$$DFT\left\{ j\operatorname{Im}\left[x(n) \right] \right\} = X_{op}(k) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X((k))_N - X^*((N-k))_N \right] R_N(k)$$

即，复序列的虚部乘以j的DFT等于序列的DFT的圆周共轭反对称分量。

证明：

$$DFT\left\{ j\operatorname{Im}\left[x(n) \right] \right\} = \frac{1}{2}\left\{ DFT\left[x(n) \right] - DFT\left[x^*(n) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(k) - X^*((N-k))_N R_N(k) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[X((k))_N - X^*((N-k))_N \right] R_N(k) \quad = X_{op}(k)$$

7 对称性质5：圆周共轭对称序列DFT

圆周共轭对称序列满足

$$X_{ep}(k)=X_{ep}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

含义：$X_{ep}(k)$ 的模偶对称，幅角奇对称。

或者，幅度谱偶对称，相位谱奇对称

或者，实部偶对称，虚部奇对称。

$$\left|X_{ep}(k)\right|=\left|X_{ep}((N-k))_N R_N(k)\right|$$

$$\arg\left[X_{ep}(k)\right]=-\arg\left[X_{ep}((N-k))_N R_N(k)\right]$$

意义： 参见图3-5, P128

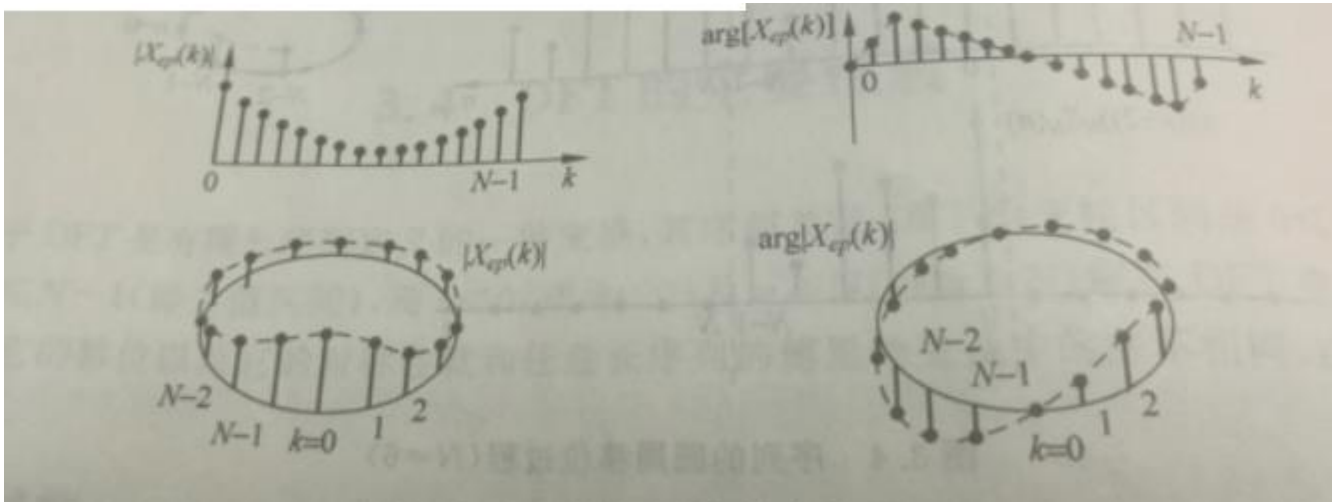


图 3.5 圆周共轭对称的序列 $X_{ep}(k)$

将 $X_{ep}(k)$ 看成为N等分的圆上，在 $k=0$ 的左半圆上和右半圆上，序列是共轭对称的，即模偶对称，幅角奇对称。或者，实部是偶对称的，虚部是奇对称的。

8 对称性质6：圆周共轭反对称序列DFT

圆周共轭反对称序列满足

$$X_{op}(k) = -X_{op}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

含义：$X_{op}(k)$的实部奇对称，虚部偶对称

$$\mathrm{Re}\left[X_{op}(k)\right] = -\mathrm{Re}\left[X_{op}((N-k))_N R_N(k)\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[X_{op}(k)\right] = \mathrm{Im}\left[X_{op}((N-k))_N R_N(k)\right]$$

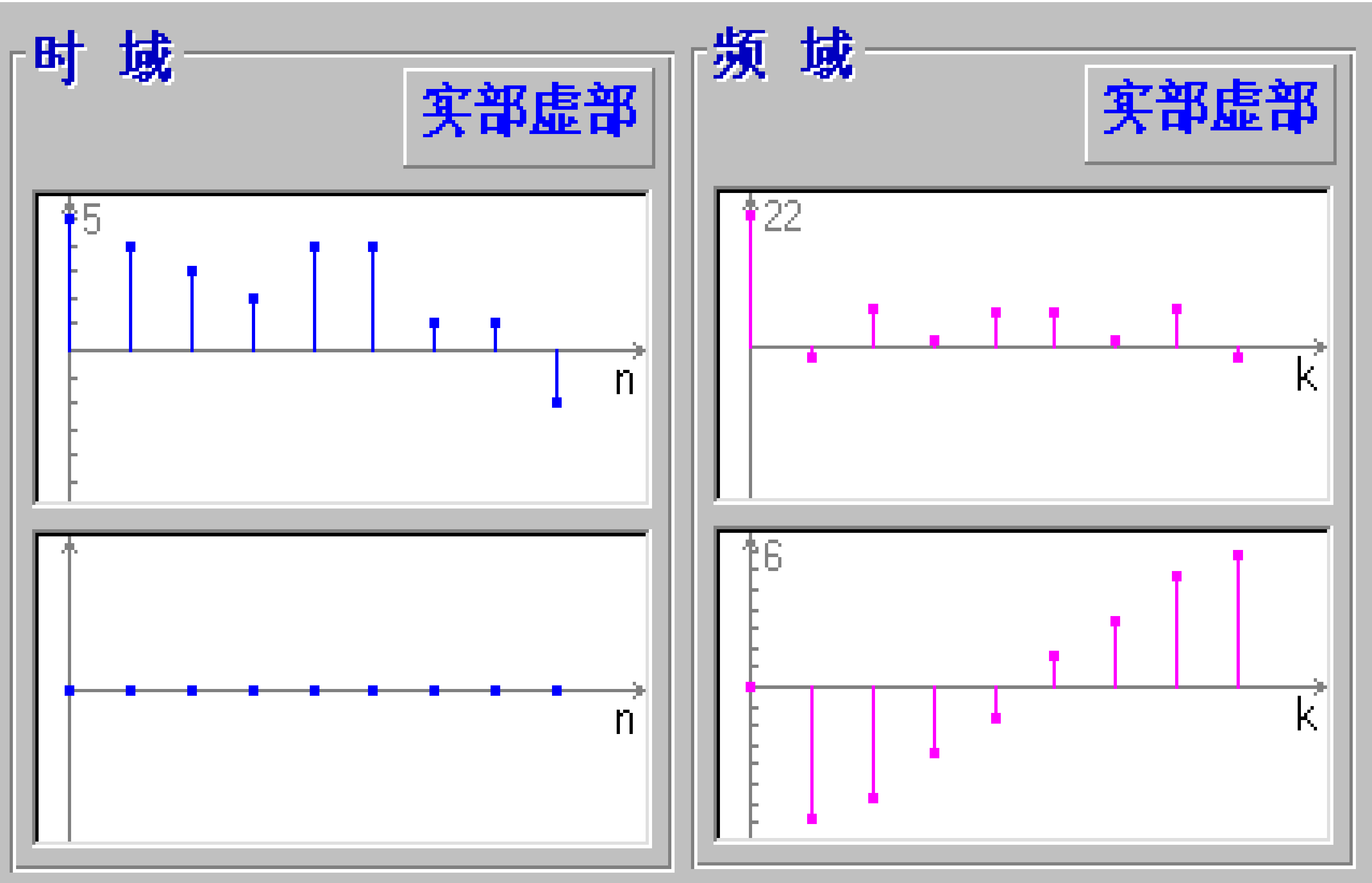
9 对称性质7：实序列的DFT

若 $x(n)$ 是实序列，则 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量，即满足

$$X(k)=X^*((N-k))_N R_N(k)$$

因此，计算 $x(n)$ 的DFT时，只要计算频谱 $X(k)$ 的一半就够了，另一半可以通过其对称性来求。

原序列为实序列，其频域为圆周共轭对称序列



10 对称性质8：纯虚序列的DFT

若 $x(n)$ 是纯虚序列，则 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称分量，满足

$$X(k) = -X^*((N-k))_N R_N(k)$$

同样，计算 $x(n)$ 的DFT时，也只要计算频谱 $X(k)$ 的一半就够了，另一半可以通过其对称性来求。

11 对称性质9：

$X(k)$ 的实部和虚部与 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量的关系：

$$DFT\left[x_{ep}(n)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$$

$$DFT\left[x_{op}(n)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$$

离散傅里叶变换 $X(k)$ 的对称性质

$$x(n) = \mathrm{Re}\left[x(n)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[x(n)\right]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$x(n) \quad = \quad x_{ep}(n) \quad + \quad x_{op}(n)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X(k) = \mathrm{Re}\left[X(k)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$$

$\Updownarrow$ **DFT与IDFT**

序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的对称性质

$$x(n) = \mathrm{Re}\left[x(n)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[x(n)\right]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$x(n) \quad = \quad x_e(n) \qquad + \qquad x_o(n)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] + j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

$\Updownarrow$ **DTFT与IDTFT**

表3-2 序列及其DFT的实、虚、偶、奇关系

$x(n)$[或$X(k)$]	$X(k)$[或$x(n)$]
偶对称	偶对称
奇对称	奇对称
实数	实部偶对称，虚部奇对称
虚数	实部奇对称，虚部偶对称
实数偶对称	实数偶对称
实数奇对称	实数奇对称
虚数偶对称	虚数偶对称
虚数奇对称	虚数奇对称

例题：利用共轭对称性质，用一次DFT运算来计算两个实序列的DFT。

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是N点的实数序列，

$$X_1(k)=DFT\left[x_1(n)\right],\quad X_2(k)=DFT\left[x_2(n)\right]$$

利用这两个实数序列构造严格复数序列

$$w(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

$$W(k)=DFT[w(n)]=DFT[x_1(n)+jx_2(n)]$$
$$=DFT[x_1(n)]+jDFT[x_2(n)]$$
$$=X_1(k)+jX_2(k)$$

故，利用对称性质3

$$X_1(k)=DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\}=W_{ep}(k)$$
$$=\frac{1}{2}\left[W(k)+W^*((N-k))_N\right]R_N(n)$$

注意：不存在等式 why?

$$X_1(k)=DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\}\neq \mathrm{Re}[W(k)]$$

同理，利用对称性质4

$$X_2(k) = DFT\{\mathrm{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j} W_{op}(k)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[W(k) - W^*((N-k))_N\right] R_N(n)$$

10、 DFT形式下的帕赛瓦定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

证明：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-nk}\right]^*$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

若令 $x(n)=y(n)$ ，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

即 $$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

表明，序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。

11、 圆周卷积和 circular convolution cyclic convolution

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为N的有限长序列（ $0 \le n \le N-1$ ）

$$X_1(k) = DFT\left[x_1(n)\right],\quad X_2(k) = DFT\left[x_2(n)\right]$$

若 $$Y(k) = X_1(k) \bullet X_2(k)$$

则 $$y(n) = IDFT\left[Y(k)\right] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N\right]R_N(n)$$

证明思路：从周期卷积来推导！

证明：

将 $x_1(n)$ ，$x_2(n)$ 和 $y(n)$ ， $X_1(k)$ ，$X_2(k)$ 和 $Y(k)$ 进行周期延拓，得到 $\tilde{x}_1(n)$ ，$\tilde{x}_2(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ ，$\tilde{X}_1(k)$ ，$\tilde{X}_2(k)$ ，和 $\tilde{Y}(k)$

即有，

$$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\bullet\tilde{X}_2(k)$$

按照DFS的周期卷积和公式，

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1((m))_N\,x_2((n-m))_N$$

由于 $0\le m\le N-1$ ，为主值区间，故

$$x_1((m))_N=x_1(m)$$

$$\therefore\ y(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

同样可以证明

$$\therefore\ y(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N\right]R_N(n)$$

运算为圆周卷积和！它和周期卷积过程是一样的，只不过取结果的主值序列。

$x_1((n-m))_N$ 或 $x_2((n-m))_N$ 中的**m**取值为 $0\le m\le N-1$，为圆周移位，故卷积为圆周卷积。

有些书籍称循环卷积。

用符号 Ⓝ 表示，圆圈内的N表示N点圆周卷积和。

有些书籍中，用 ⊛ 表示圆周卷积和。

$$x_1(n) \, Ⓝ \, x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$x_2(n) \, Ⓝ \, x_1(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

<u>例题：两个有限长序列的7点圆周卷积</u>

参见P136，图3-7

圆周卷积的矩阵计算法

$$y(n) = x_1(n) \, \textcircled{N} \, x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

以m为哑变量， $x_2((n-m))_N$ **表示圆周翻褶序列** $x_2((-m))_N$ **圆周移位序列，移位数为 n。**

当 n=0时，以m为变量（m=0,1,…,N-1）的 $x_2((-m))_N R_N(n)$ **序列为**

$$\{x_2(0), x_2(N-1), x_2(N-2), \ldots, x_2(1)\}$$

故可以得出 $x_2((n-m))_N R_N(n)$ 的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(N-2) & \dots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(N-1) & \dots & x_2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(N-3) & \dots & x_2(1) \end{bmatrix}$$

圆周移位的矩阵计算公式为

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(N-2) & \dots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(N-1) & \dots & x_2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(N-3) & \dots & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ \vdots \\ x_1(N-1) \end{bmatrix}$$

如果 $x_1(n)$和 $x_2(n)$ 的长度不是**N**，则补零

例如： $x_1(n)=\{\underline{1},1,1\}$

$$x_2(n)=\{\underline{1},1,1,0,0,0,1\}$$

计算： $y(n)=x_1(n)\ ⑦\ x_2(n)$

$$\begin{bmatrix} y(0)\\ y(1)\\ y(2)\\ y(3)\\ y(4)\\ y(5)\\ y(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\{\underline{2},3,3,2,1,0,1\}$$

例如：$x_1(n)=\{\underline{1},1,1\}$

$$x_2(n)=\{\underline{1},1,1,0,0,0,1\}$$

将 $x_1(n)$ 圆周移位

计算：$y(n)=x_2(n)⑦x_1(n)$

$$\begin{bmatrix} y(0)\\ y(1)\\ y(2)\\ y(3)\\ y(4)\\ y(5)\\ y(6) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}=\{\underline{2},3,3,2,1,0,1\}$$

频域卷积和

若 $$y(n)=x_1(n)\bullet x_2(n)$$

则

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2((k-l))_N\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1((k-l))_N\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}X_1(k)\ \text{Ⓝ}\ X_2(k)$$

12、有限长序列的线性卷积与圆周卷积和

- 时域圆周卷积在频域上是序列的DFT相乘
- 实际问题都是线性卷积
- 如何利用DFT计算线性卷积？
- 能否用圆周卷积来代替线性卷积？

设 $x_1(n)$是 N_1 点的有限长序列 $0 \le n \le N_1 - 1$ ，

$x_2(n)$是 N_2 点的有限长序列 $0 \le n \le N_2 - 1$ ，

（1） 线性卷积

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) x_1(n-m)$$

$x_1(n)$的非零区间为 $0 \le n \le N_1 - 1$

$x_2(n)$的非零区间为 $0 \le n \le N_2 - 1$

$y_l(n)$ 的非零区间为 $0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$

在 $0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$ 外，$y_l(n) = 0$

故 $y_l(n)$ 是 $N_1 + N_2 - 1$ 点的有限长序列，长度等于 两个序列长度之和减一。

例题：$x_1(n)$ 是$N_1 = 3$ 的矩形序列，图**3-11(a)**

$x_2(n)$ 是$N_2 = 5$ 的序列，图**3-11(b)**

$$x_1(n) = \{1, 1, 1; n = 0, 1, 2\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4, 5; n = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x_1(n)=\{1, 1, 1; n=0, 1, 2\}$$

$$x_2(n)=\{1, 2, 3, 4, 5; n=0, 1, 2, 3, 4\}$$

则其线性卷积为 $N=7$ 的序列，图3-11(c)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
 & & & & 5 & 5 & 5 \\
 & & & 4 & 4 & 4 & \\
 & & 3 & 3 & 3 & & \\
 & 2 & 2 & 2 & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5
\end{array}
$$

$$x_1(n)*x_2(n)=\{1, 3, 6, 9, 12, 9, 5; n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

（2）圆周卷积

考虑 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的L点的圆周卷积。

将 $x_1(n)$ 和$x_2(n)$ 都延长为L点的序列，即补零。

$$x_1(n)=\begin{cases} x_1(n), & 0\le n\le N_1 \\ 0, & N_1\le n\le L-1 \end{cases}$$

$$x_2(n)=\begin{cases} x_2(n), & 0\le n\le N_2 \\ 0, & N_2\le n\le L-1 \end{cases}$$

故L点圆周卷积为：

$$\therefore\ y(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2((n-m))_L\right]R_L(n)$$

将$\tilde{x}_2(n)$写成L点的周期延拓序列，

$$\widetilde{x}_2(n)=x_2((n))_L=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rL)$$

$$\tilde{x}_2(n-m)=x_2((n-m))_L=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n-m+rL)$$

代入上式，有，

$$\therefore\ y(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2((n-m))_L\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rL-m)\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2(n+rL-m)\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n+rL-m)\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rL)\right]R_L(n)$$

故L点圆周卷积 $y(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以L为周期的周期延拓序列的主值序列。

前面已经求出，$y_l(n)$ 有 N_1+N_2-1 个非零值，所以，延拓的周期L必须满足

$$L \geq N_1+N_2-1$$

各周期延拓才不会重叠，此时，$y(n)$ 的前 N_1+N_2-1 个值正好是 $y_l(n)$ 的全部非零值。

故L点圆周卷积 $y(n)$ 与 线性卷积 $y_l(n)$ 相等的充要条件为：

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

此时，

$$x_1(n) \; \text{Ⓛ} \; x_2(n) = x_1(n) * x_2(n),$$

结论：若，$L \geq N_1 + N_2 - 1$，L点圆周卷积能代表线性卷积。

例如：如何求5点圆周卷积 $x_1(n)$ ⑤ $x_2(n)$ ？

$$x_1(n) = \{1, 1, 1; n = 0, 1, 2\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4, 5; n = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

方法（1）：利用圆周卷积公式求解

方法（2）：利用圆周卷积是线性卷积的周期延拓求。

方法（2）：利用圆周卷积是线性卷积的周期延拓求。

$$y(n)=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rL)\right]R_L(n)$$

$$y_l(n)=x_1(n)*x_2(n)=\{1,3,6,9,12,9,\ 5;n=0,\ldots,6\}$$

$$y(0)=\ y_l(0)+y_l(5)\ =1+9=10$$

$$y(1)=y_l(1)+y_l(6)=3+5=8$$

$$y(2)=y_l(2)=6$$

$$y(3)=y_l(3)=9$$

$$y(4)=y_l(4)=12$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} 1, & 3, & 6, & 9, & 12, & 9, & 5 \\ 9, & 5 & & & & & \\ \hline 10, & 8, & 6, & 9, & 12 & & \end{array}$$

$$y(n)=x_1(n)\ ⑤\ x_2(n)=\{10,8,6,9,12;n=0,1,2,3,4\}$$

图3-11， (d), (e), (f), (g)反映了圆周卷积和线性卷积的关系。

(d), (e), 中，L=5和L=6，均小于 $N_1+N_2-1=7$ 此时，产生重叠现象，圆周卷积不等于线性卷积。

(f), 中，L=7等于 $N_1+N_2-1=7$ ，此时，圆周卷积等于线性卷积。

(g), 中，L=8大于 $N_1+N_2-1=7$ ，此时，圆周卷积的前7点等于线性卷积，第8点是零值，没有意义。

13、线性相关与圆周相关

1、线性相关

定义：两个确定信号或者随机信号之间的相互关系，称作（线性）相关，又称相关系数（函数）。

$$r_{xy}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y^{*}(m-n)$$

线性卷积

$$x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y^{*}(n-m)$$

为与书本一致，写作

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$$

当x(n)，y(n)均为实数时，

线性相关 $$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-m)$$

线性卷积 $$x(m)*y(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(m-n)$$

- 卷积运算包括：反褶、移位、相乘、相加
- 相关运算只包括：移位、相乘、相加，没有反褶
- 相关函数不满足交换律

$$r_{yx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x^*(n-m) \overset{k=n-m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)y(k+m)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)y[n-(-m)]=\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*[n-(-m)]\right\}^*=r_{xy}^*(-m)$$

一般： $r_{xy}(m)\neq r_{xy}^*(-m)$ $\Rightarrow$ $r_{xy}(m)\neq r_{yx}(m)$

因为：**x(n)**与**y(n-m)**的相似程度和**y(n)**与**x(n-m)**的相似程度是不一样的。

相关函数还可以写作

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^*(n)$$

例题：求实序列的自相关函数

信号**x(n)**与自身相关，称作自相关函数 $r_{xx}(n)$

或称为 $r_x(n)$

$$r_x(m)=r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)x(n+m)$$

实序列自相关函数性质 — 偶对称性

$$r_{xx}(m) = r_{xx}(-m)$$

证明：

$$r_{xx}(-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-(-m)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n+m)$$

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) \overset{n-m=k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+m)x^*(k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)x^*(n)$$

$x(n)$ 为实序列，则

$$r_{xx}(-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)$$

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)x(n)$$

$$\therefore r_{xx}(m)=r_{xx}(-m)$$

相关函数的z变换为

$$R_{xy}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)z^{-m} \quad =\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^{*}(n-m)z^{-m}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sum_{m=-\infty}^{\infty} y^{*}(n-m)z^{-m} \quad \overset{k=n-m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} y^{*}(k)z^{(k-n)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} y^{*}(m)z^{m}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)\left(\frac{1}{z^{*}}\right)^{-m}\right]^{*} \quad =X(z)Y^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)$$

代入 $z = e^{j\omega}$ ，得到频谱

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y^*\left(e^{j\omega}\right)$$

只有 $X(e^{j\omega})$和$Y(e^{j\omega})$ 均不为零，$R_{xy}(e^{j\omega})$ 才不为零

故：相关函数只包含两个信号所共有的频率分量。

若，**x(n)=y(n)**，则

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

自相关函数的频谱就是信号幅度谱的平方。

2、圆周相关

有限长序列x(n)与y(n)的圆周相关定义为：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*((n-m))_N R_N(m)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}y^*(n)x((n+m))_N R_N(m)$$

- **圆周相关定理**

若有限长序列x(n)与y(n) 的DFT满足

$$R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

则 $R_{xy}(k)$ **的IDFT就是圆周相关函数**

$$r_{xy}(m) = IDFT\left[R_{xy}(k)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N R_N(m)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N R_N(m)$$

证明：将 $X(k)$ 和 $Y^*(k)$ 进行周期延拓

$$\widetilde{R}_{xy}(k)=\widetilde{X}(k)\widetilde{Y}^*(k)$$

则有

$$\widetilde{r}_{xy}(m)=IDFT\left[\widetilde{R}_{xy}(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Y}^*(k)\widetilde{X}(k)W_N^{-mk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Y}^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)W_N^{nk}W_N^{-mk}=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Y}^*(k)W_N^{(n-m)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\widetilde{Y}(k)W_N^{-(n-m)k}\right)^*$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\widetilde{y}^*(n-m)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{y}^*(n)\widetilde{x}(n+m)$$

等式两边取主值序列，可得

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^{*}((n-m))_N R_N(m)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}y^{*}(n)x((n+m))_N R_N(m)$$

当**x(n)**，**y(n)**为实数时， $R_{xy}(k)=X(k)Y^{*}(k)$

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y((n-m))_N R_N(m)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}y(n)x((n+m))_N R_N(m)$$

比　较

线性卷积	$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$	$Y(z)=X_1(z)\bullet X_2(z)$ $Y(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})\bullet X_2(e^{j\omega})$ $Y(k)=X_1(k)\bullet X_2(k)$
周期卷积	$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$ $=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N$	$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\bullet \tilde{X}_2(k)$
圆周卷积	$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(m)$	$Y(z)=X_1(z)\bullet X_2(z)$ $Y(k)=X_1(k)\bullet X_2(k)$
线性相关	$r_{xy}(m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)$	$R_{xy}(z)=X(z)\bullet Y^*(\frac{1}{z^*})$ $R_{xy}(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\bullet Y^*(e^{j\omega})$
圆周相关	$r_{xy}(m)=\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y^*((n-m))_N R_N(m)$	$R_{xy}(k)=X(k)\bullet Y^*(k)$

3.6 频谱抽样理论

- 模拟信号 $x(t)$ 在**时域抽样**时，得到的离散时间信号 $x(n)$ 的（连续）频谱是原模拟信号频谱的周期延拓函数，延拓周期是 $\Omega_s = 2\pi f_s$， $f_s = 1/T$ T是抽样周期；
- 当抽样频率满足奈奎斯特抽样定理（ $f_s \geq 2f_h$ ）时，从抽样信号 $x(n)$ 可以无失真地恢复原模拟信号。
- 同样，**频域抽样**，时域会产生周期延拓。

- 频域抽样：

  周期序列的离散傅里叶级数的系数 $\widetilde{X}(k)$ 的值和原序列 $\widetilde{x}(n)$ 的一个周期 **x(n)** 的**z**变换在单位圆上的**N**等分上的抽样值相等。

$$\widetilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$$

- 也就是说，如果我们知道了周期序列的一个周期的**z**变换，那么，根据其抽样，就可以得到其序列的离散傅里叶级数的系数 $\widetilde{X}(k)$ ，则原序列可以表示为（傅里叶级数反变换）：

$$\widetilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

- **问题：**

  （1）频域抽样点数为N，构造有限长序列 X(k)，信息有没有损失？也即，能否由 X(k)恢复原序列x(n)？

  （2）是否任何一个序列都可以用频域抽样的方法去逼近呢？

- 考虑一般序列（绝对可和的非周期序列）$x(n)$，其z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，周期为**M**，其主值序列为 $x(n)$，

$0\le n\le M-1$，

- $x(n)$ 绝对可和，则其傅里叶变换存在且连续，故其 **z** 变换 **X(z)** 的收敛域包括单位圆。也即可以在单位圆上对 **X(z)** 进行频域抽样。

$$X(z)=\sum_{n-0}^{M-1}x(n)z^{-n}$$

- 对 $X(z)$ 在单位圆上进行N等分抽样，得到周期序列

$$\tilde{X}(k) = X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk}$$

- 周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的一个周期（N点），就是 $X(k)$
- 由该周期序列 $\tilde{X}(k)$，可以求出其反变换 $\tilde{x}(n)$（N点）
- 根据 $\tilde{x}(n)$，能否求出原序列 $x(n)$ （M点）？
- 原来问题转化为：

根据 $\tilde{X}(k)$ 能否无失真恢复原序列 $x(n)$ ？

- 我们求 $\tilde{X}(k)$的离散傅里叶级数的反变换 $\tilde{x}_N(n)$

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS\left[\tilde{X}(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk} \quad ,\ n = 0,1,\ldots,N-1$$

- 将 $\widetilde{X}(k)$ 的表达式代入， 有

$$\tilde{x}_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}\right]W_N^{-nk}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]$$

$$\because\quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}1, & m-n=rN,\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\therefore\quad \tilde{x}_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

$$\tilde{x}_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

- 结论：

  由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓，其周期为频域抽样点数N。

- 故：频域抽样，会造成时域的周期延拓。

- 第一章学习过：

  时域抽样造成频域的周期延拓

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

- 时域、频域是一一对应的。

讨论： $$\tilde{x}_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

1. 如果 $x(n)$ 不是有限长序列，则时域周期延拓后，必然会造成混叠现象，产生误差。当序列随着**n**的增加时，信号衰减很快，或者，频域抽样越密（抽样点数**N**越大），则误差越小。

2. 如果 $x(n)$ 是有限长序列，点数为**M**，则当频域抽样不够密，（**N<M**），$x(n)$ 以**N**为周期进行周期延拓，就会造成混叠，产生误差。从 $\tilde{x}_N(n)$ 中不能无失真地恢复原信号 $x(n)$ 。

3. 对于长度为M的有限长序列，频域抽样后能不失真地恢复原序列的条件是 → 频域抽样的点数N要大于或等于M，即

$$N \geq M$$

此时，有

$$x_N(n) = \widetilde{x}_N(n) R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n)$$

$$= x(n), \qquad N \geq M$$

4. 长度为N（或者小于N）的有限长序列，可以用它的z 变换在单位圆上的 N 等分上的抽样值来精确表示。

5. 频率抽样定理

如果序列的长度为M点，对其频谱 $X(e^{j\omega})$在 $0 \le \omega < 2\pi$ 上进行等间隔N点抽样（抽样点不包括 $\omega = 2\pi$ ）得到 $\tilde{X}(k)$， 只有当抽样点数N满足 $N \ge M$ 时，才能由 $\tilde{X}(k)$ 无失真恢复 $x(n)$

$$x(n) = IDFT\left[\tilde{X}(k)R_N(n)\right]$$

否则，将产生时域的混叠失真，不能由 $\tilde{X}(k)$ 无失真恢复原序列 $x(n)$

- 另一问题：

  N个频域抽样 $X(k)$ 能否完全表达 $X(z)$ 及频率响应 $X(e^{j\omega})$ ？

- 答案也是肯定的！

1、由 X(k) 求 X(z)

将 $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

代入 $$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

有

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

—— **N个频域抽样 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 的插值公式！**

$$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

- 表示为

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$

其中

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\bullet\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

称为插值函数！

下面分析插值函数零点和极点

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\bullet\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

- $\Phi_k(z)$有**N**个零点 $z=e^{j\frac{2\pi r}{N}}$， $r=0,1,...,N-1$
- $\Phi_k(z)$有一个非零极点 $z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi k}{N}}$
- 该极点和第**k**个零点相抵消！
- 故插值函数 $\Phi_k(z)$ 只在其本身抽样点 $r=k$ 处不为零，等于**1**，在其它（**N-1**）个抽样点上都是零。 在抽样点上**X(z)＝X(k)**。
- $\Phi_k(z)$在 $z=0$ 有（**N-1**）阶极点

2、频率响应 $X(e^{j\omega})$

- **z变换** $X(z)$ 在单位圆上的值即为频率响应 $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

而

$$\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\bullet\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})}}$$

$$=\frac{1}{N}\bullet\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

令

$$\Phi_k(e^{j\omega})=\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

其中，$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

则有：$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

幅度特性 $$\left|\Phi(\omega)\right|=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

相位特性 $$\arg\left[\Phi(\omega)\right]=-\frac{N-1}{2}\omega$$

$\Phi(\omega)$ 的幅度特性和相位特性如图3-14所示。

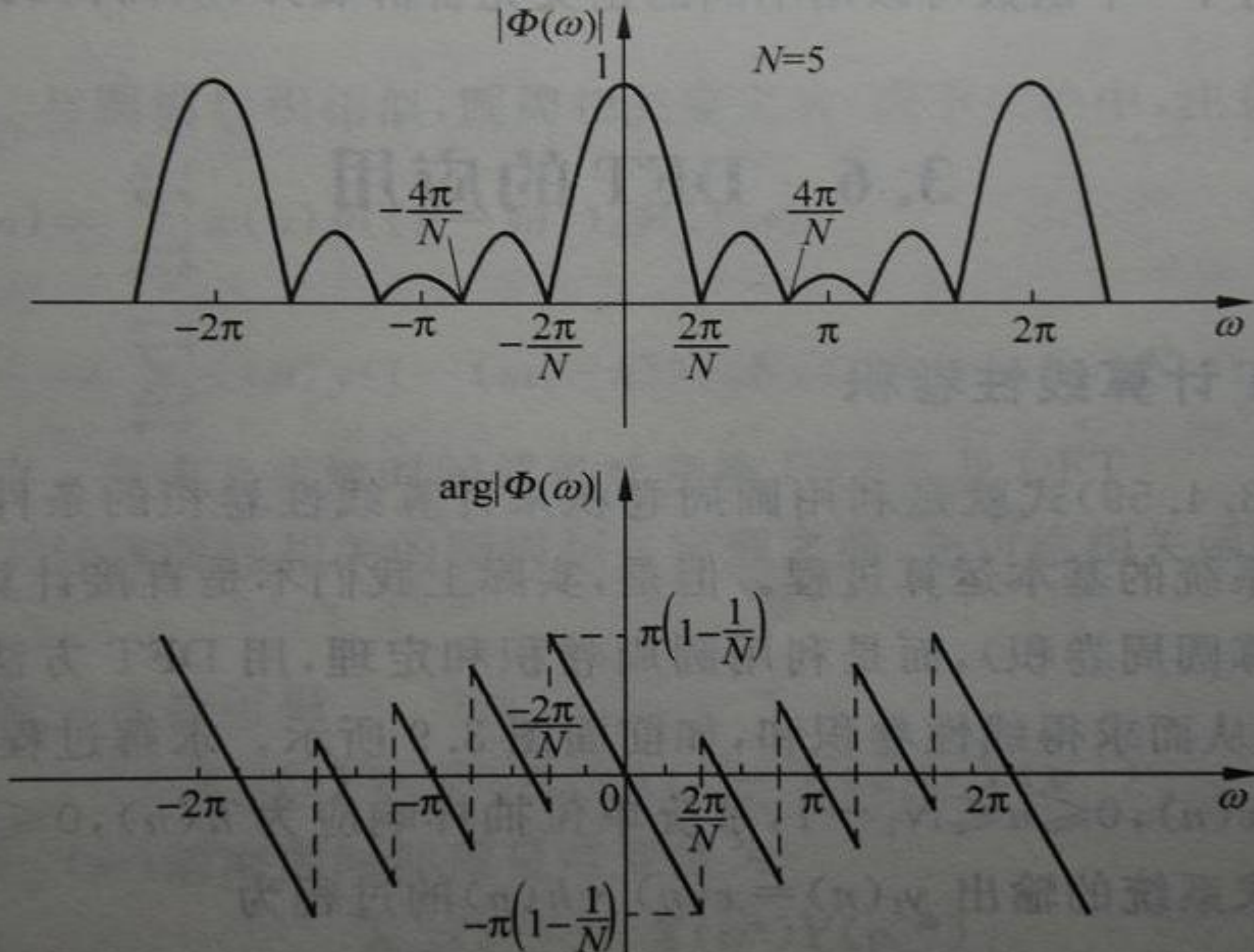


图 3.14 插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性与相位特性($N=5$)

考虑

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=0\\ 0, & \omega=\frac{2\pi i}{N},\ i=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

故有

$$\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)=\begin{cases}1, & \omega=\frac{2\pi k}{N}=\omega_k\\ 0, & \omega=\frac{2\pi i}{N}=\omega_i,\ i\neq k\end{cases}$$

在第**k**个抽样点上，函数$\Phi\left(\omega_k-\frac{2\pi}{N}k\right)=1$，其它抽样点上，$\Phi\left(\omega_i-\frac{2\pi}{N}k\right)=0$ 。故在每一个抽样点上，频谱$X(e^{j\omega})$精确地等于**X(k)**。

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(k),\quad k=0,1,...,N-1$$

- 抽样点之间的$X(e^{j\omega})$值由抽样点的加权插值得到。

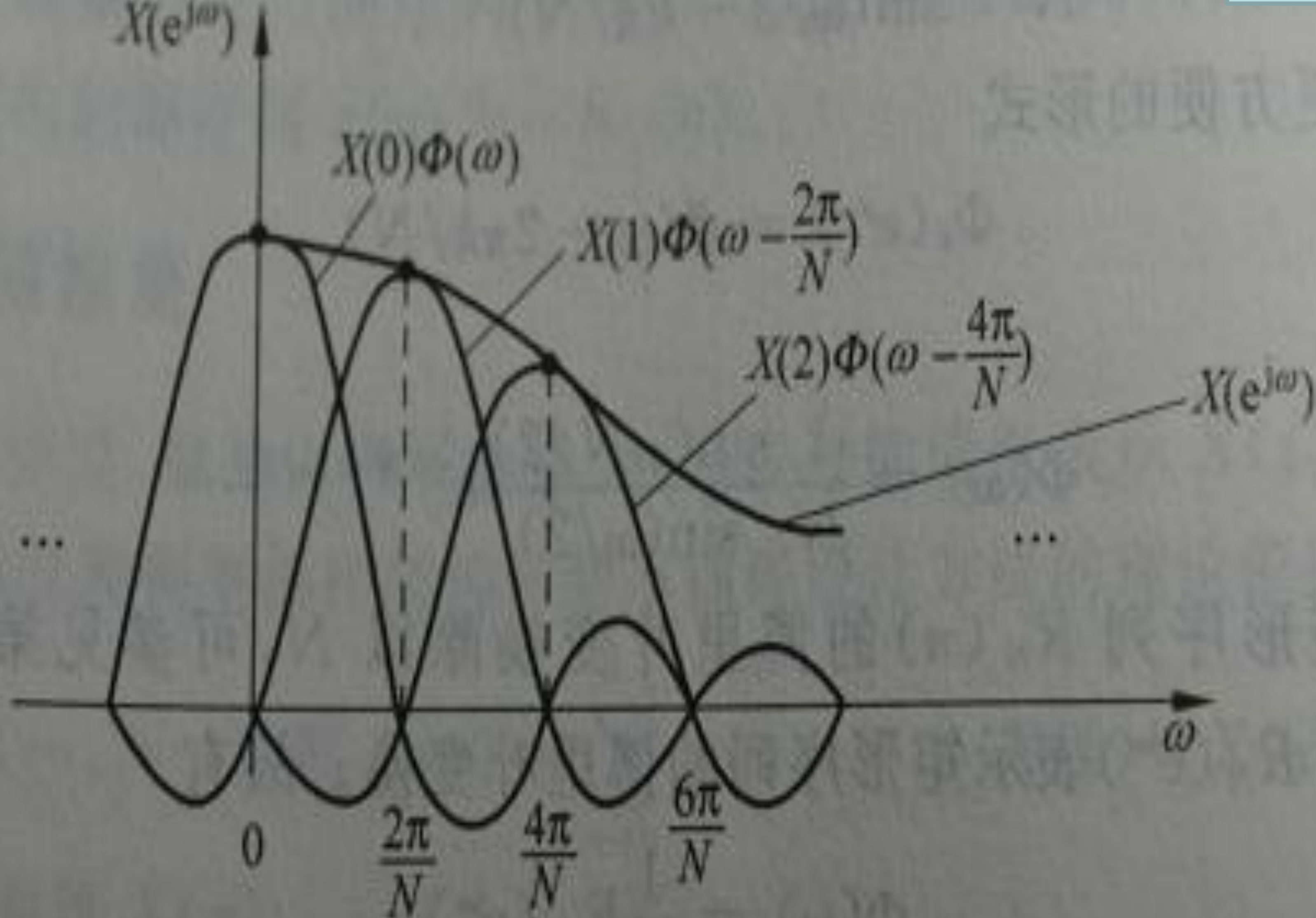


图 3.15 由插值函数求得 $X(e^{j\omega})$ 的示意图

3.7 DFT的应用

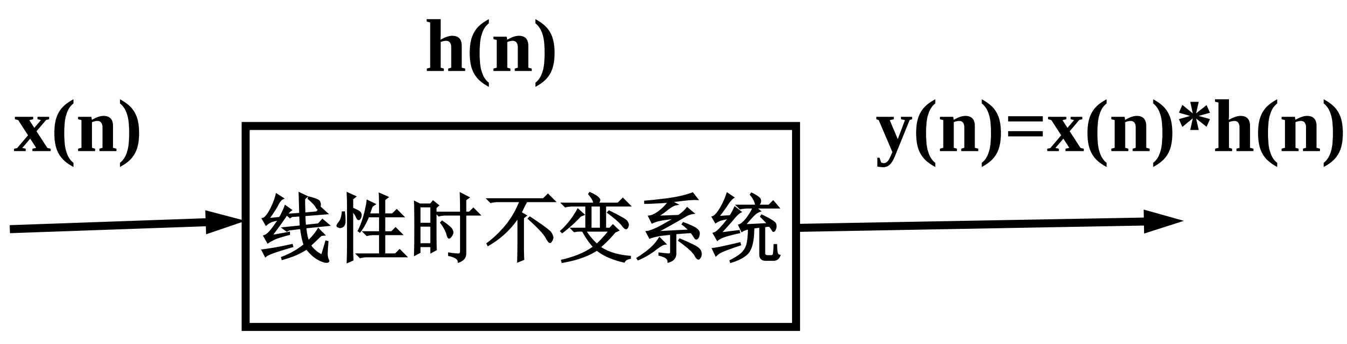
- DFT及FFT在信号滤波、功率谱分析、系统分析、通讯理论方面有广泛的应用。归结起来，有两个方面：1）计算线性卷积、线性相关，2）用DFT(FFT)作为连续傅里叶变换的近似.
- FFT并不是什么新的变换，只是DFT在计算机上的一种快速算法，虽实际中广泛使用的是FFT，但其应用的理论基础仍是DFT.

- **通过考察计算线性卷积（相关)和连续傅里叶逼近这两种DFT应用，就可以说我们建立了一般FFT应用的基本理论基础。**

1. **采用DFT办法求解线性卷积。**
2. **采用DFT逼近连续时间信号的傅里叶变换(级数)。**

一、采用DFT办法求解线性卷积

若做卷积的两序列都是有限长序列，能否用它们的圆周卷积结果代替它们的线性卷积结果呢？即圆周卷积与线性卷积的关系是什么?



设有限长序列： $x_1(n),\ 0 \le n \le N_1$

$x_2(n),\ 0 \le n \le N_2$

我们把 $x_1(n), x_2(n)$ **补零点至 L 点，**

$$L \ge Max\left[N_1, N_2\right]$$

$x_1(n)$与$x_2(n)$的L点圆周卷积：$y(n) = x_1(n)$ L $x_2(n)$

$x_1(n)$与$x_2(n)$的线性卷积：$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$

注意： $y(n)$**是 L 点序列，**

$y_l(n)$ **是 N_1+N_2-1 点序列)**

$$y(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL)R_L(n)$$

L点圆周卷积 $y(n)$ 是 线性卷积 $y_l(n)$ 以L为周期的周期延拓序列。

L点圆周卷积 $y(n)$ 与 线性卷积 $y_l(n)$ 相等的充要条件为：

$$\mathrm{L} \geq N_1+N_2-1 \qquad\qquad y(n)=y_l(n)$$

圆周卷积代替线卷积的实现方法

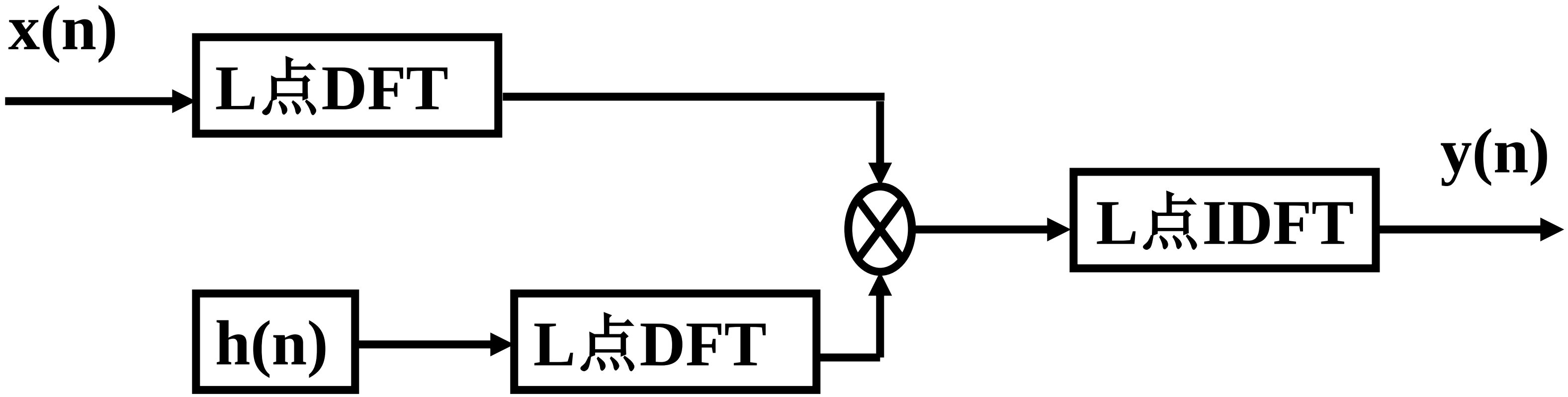
设L为圆周卷积点数:

$$\text{圆周卷积} \xleftrightarrow[\text{L点圆延拓，再取主值}]{\text{圆周卷积点数L（}L \geq N_1+N_2-1\text{）}} \text{线性卷积}$$

- 设x(n)是激励, 是$0 \le n \le N_1-1$的有限长序列；h(n)是线性时不变系统的单位抽样响应，是$0 \le n \le N_2-1$的有限长序列;
- y(n)是激励通过系统后的响应

即：$y(n)=x(n)* h(n)$.

- **取$L \geq N_1+N_2-1$情况下,圆周卷积代替线性卷积的实际实现的框图如下**



- **上图依据的是圆周卷积定理，做的是圆周卷积，由于L选取符合条件，因而圆周结果是与线性卷积结果一致的。**

二、用DFT逼近连续时间信号的付里叶变换（级数）

- 我们知道DFT的最初引入就是为了使数字计算机能够帮助分析连续时间信号的频谱。
- DFT的快速算法-----快速傅里叶变换(FFT)的出现使得DFT这种分析方法具有实用价值和重要性.

讨论内容

1. **用DFT逼近连续非周期信号的傅里叶变换。**
2. **用DFT逼近连续周期信号的傅里叶级数。**
3. **用DFT逼近有限长信号的傅里叶变换。**
4. **利用DFT计算模拟信号可能出现的几个问题。**

4. 利用DFT计算模拟信号可能出现的几个问题

模拟信号 → 离散时间信号

问题1：频率响应的混叠失真与参数的选择

问题2：频率泄漏

问题3：栅栏效应

问题4：频率分辨力

问题1 频率响应的混叠失真与参数的选择

- 抽样定理：

若信号的最高频率为 f_h ，要使抽样后不失真地恢复原信号，抽样频率 f_s 应满足：

$$f_s \geq 2f_h$$

- 工程上一般取： $f_s = (2.5 \sim 3.0) f_h$

- 如果不满足抽样定理，会产生频率响应的周期延拓分量的相互重叠现象，即频率响应的混叠失真。

- 对于DFT，频率也是离散的函数，其间隔为 F_0 ，称作：频率分辨力。该值越小越好！

- 时域抽样间隔为： $T = \dfrac{1}{f_s}$

- 频域抽样间隔为： F_0

- 时域记录长度为：(采样时间长度) $T_0 = \dfrac{1}{F_0}$

$$T_0 = NT = N \times \frac{1}{f_s} = N \times \frac{1}{NF_0} = \frac{1}{F_0}$$

- 信号的最高频率分量f_h 与频率分辨力F_0 相互矛盾（采样点数固定情况下）

- 若要想最高频率 f_h 增加，则抽样频率 f_s 也必须增加，因为抽样点数N满足

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

- 故，在N固定情况下，必然 F_0 要增加，也即信号的频率分辨力要下降！

- 若要提高信号的频率分辨力（即减小 F_0 ）当N固定时，抽样频率 f_s 要减小，要保证不产生混叠失真，必然会减小高频分量（也即信号的最高频率）f_h

$$N=\frac{T_0}{T}=\frac{f_s}{F_0}$$

- 如果要兼顾高频分量和频率分辨力，唯一办法是增加抽样点数 N，也即增加抽样的时间长度。

实际情况

- 若不知道信号的最高频率 f_h ，怎么办？
- 根据“时域变化越快，高频分量越丰富”特点，

令：变化最快的两相邻的峰谷点之间的间隔为半个周期 T_h ，

$$t_0 = \frac{T_h}{2} \qquad \because\ T_h = \frac{1}{f_h} \qquad \therefore\ f_h = \frac{1}{2t_0}$$

•若已知信号的频谱为无限宽，则，可取占信号总能量的98%左右的频带宽度 f_h 为信号的最高频率。

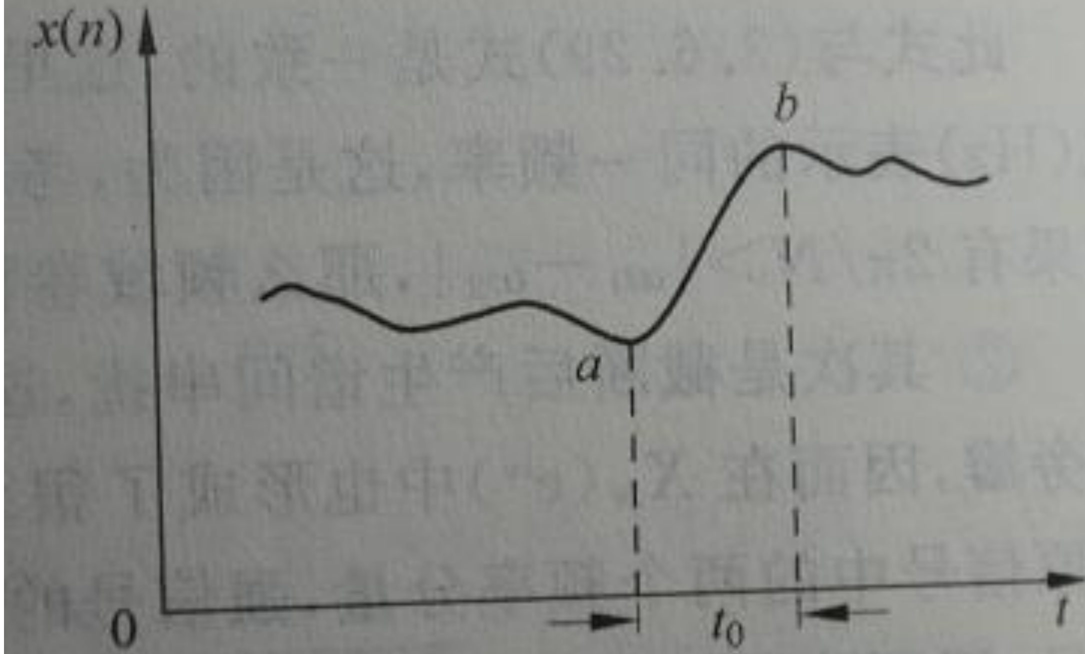


图 3.19　估算信号最高频率 f_h

例题

频谱分析用DFT处理器，其抽样点数为2的整数幂，假设没有采用任何特殊的数据处理措施，已给条件为：

（1）频率分辨力 $\le 10Hz$

（2）信号最高频率 $\le 4kHz$

试确定以下参数：

（a）最小记录长度 T_0

（b）抽样点数间的最大时间间隔T

（c）在一个记录中最少点数N

解：

（a）由分辨力的要求确定最小记录长度

$$\therefore T_0 \geq \frac{1}{F_0} = 0.1(s)$$

（b）由信号的最高频率确定最大抽样间隔

$$\because f_s \geq 2f_h$$

$$\therefore T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2\times 4\times 10^3} = 0.125\times 10^{-3}(s)$$

（c）最小记录点数应满足：

$$N > \frac{f_s}{F_0} = \frac{2\times4\times10^3}{10} = 800$$

或：

$$N > \frac{T_0}{T} = \frac{0.1}{0.125\times10^{-3}} = 800$$

取：

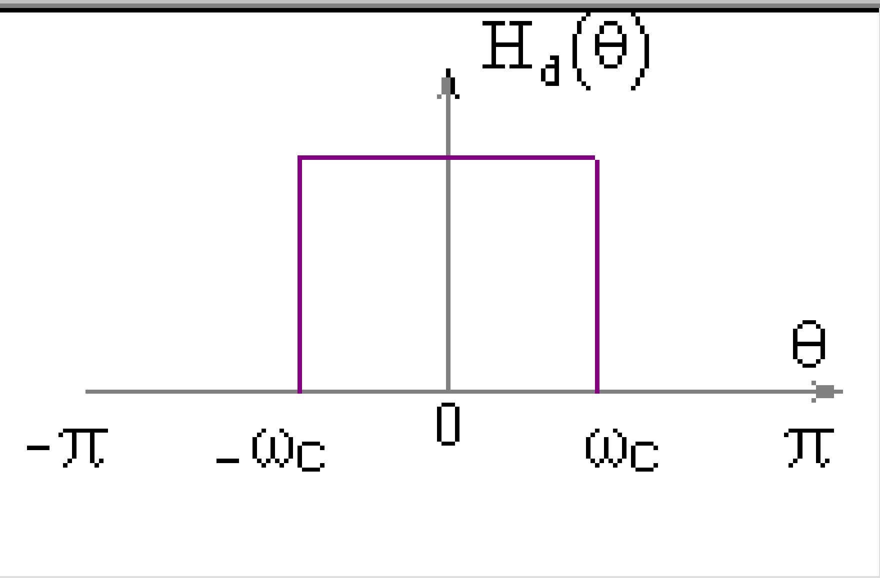
$$N = 2^m = 2^{10} = 1024$$

问题2 频率泄漏

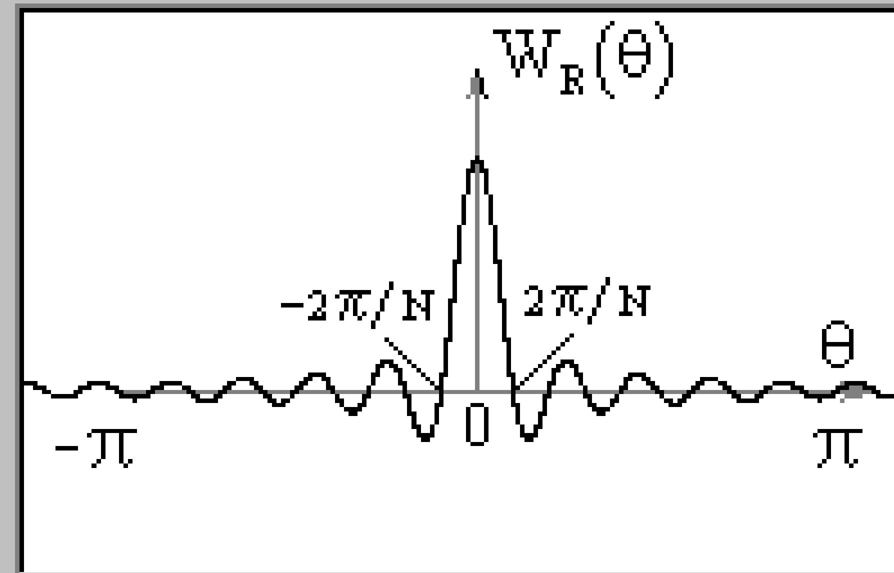
- 实际采集的信号是有限长信号，为原无限长信号的一部分，相当于原无限长信号截取得到的。其频谱与原来信号的频谱就有差别。
- 相当于在时域上乘一个矩形窗函数，则其频谱为原来频谱与矩形窗频谱的卷积，产生失真。这种失真最主要是造成频谱的“扩散”，即频谱的泄漏

$$h(n)\times w(n) \Rightarrow h(n)\times w(n)$$

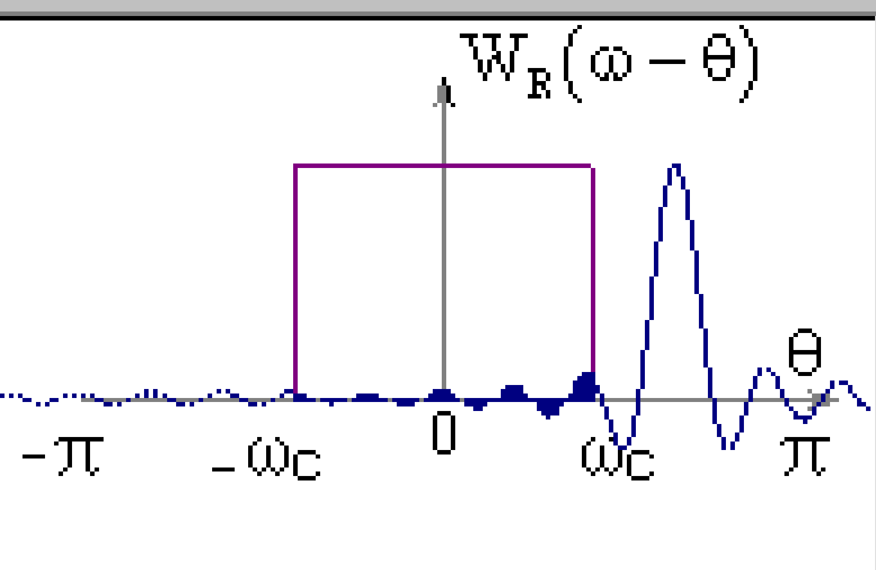
理想滤波器的幅度函数



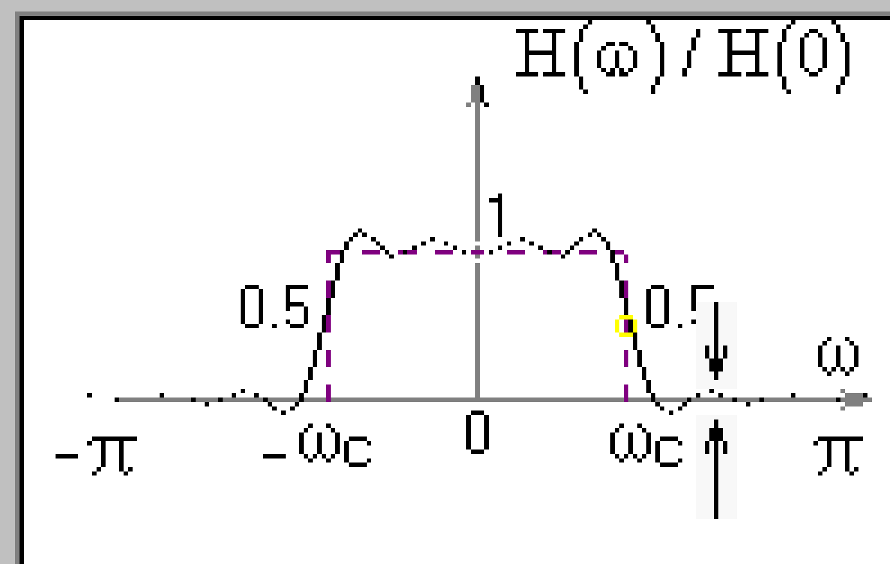
矩形窗的幅度函数



矩形窗的卷积过程图



实际滤波器的幅度函数



频率泄漏解决方法

（1）增加信号长度，也即增加窗函数长度。

（2）不采用矩形窗函数，而采用其它更好的窗函数（如，汉明窗等）。

- 在第七章**FIR**滤波器窗函数设计法中讨论。

问题3 栅栏效应

- DFT计算结果为离散值，即频谱只在基频 F_0 的整数倍上才有值，而实际信号的频谱是一个连续函数，就像通过一个“栅栏”来观看景象一样，不能看到全部的频谱值。

  ——此现象称为栅栏现象。

解决方法：增加频域抽样点数 N，也即增加时域信号的长度（或补零），使谱线更密，原来看不到的谱分量就能看到了。

问题4 频谱分辨力

- 信号长度 T_0 越长（N越大），则频谱分辨力更好！（当抽样频率 f_s 确定时）

$$F_0 = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_0}$$

- 频率分辨力与信号实际长度成反比！

- 长度 T_0 是指真正实际的信号长度，而不是补零后的长度。

- 我们知道，补零可以使频谱间隔更密，是否就提高了频谱分辨力呢？

- 答案：**No!**

  原因：补零并不能增加数据的有效长度！

- 补零作用：

  (1) 克服栅栏效应；

  (2) 使**N**为**2**的整数幂，便于**FFT**计算