第 6 次作业：

2.13 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，其离散时间傅里叶变换（DTFT）$H(e^{j\omega})$ 的实部为 $\mathrm{Re}\left[H(e^{j\omega})\right]=1+\cos(2\omega)$，试求序列 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$。

$$h_e(n) = IDTFT[Re[H(e^{jw})]] = IDTFT[1+\cos(2w)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos(2w)]e^{jwn}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{e^{j2w}+e^{-j2w}}{2}\right)e^{jwn}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{jwn}+\frac{1}{2}e^{jw(n+2)}+\frac{1}{2}e^{jw(n-2)}\right]dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jwn}dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}e^{jw(n+2)}dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}e^{jw(n-2)}dw$$

$$= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\sin[\pi(n+2)]}{2\pi(n+2)} + \frac{\sin[\pi(n-2)]}{2\pi(n-2)}$$

$$故\ h_e(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \frac{1}{2}, & n=\pm 2 \\ 0, & elso \end{cases}$$

则 $h(0)=1$，$h(2)=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$$h(n) = \{\underline{1}, 0, 1\}$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{2} h(n)e^{-jwn} = 1+e^{-j2w}$$

2.14 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，$h(0)=1$，且 $\mathrm{Im}\left[H(e^{j\omega})\right]=-\sin(2\omega)$，试求序列 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$。

$$h_o(n) = IDTFT[j\,Im[H(e^{jw})]] = IDTFT[-j\sin(2w)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-j\sin(2w)e^{jwn}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-j\,\frac{e^{j2w}-e^{-j2w}}{2j}\,e^{jwn}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jw(n-2)}dw - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jw(n+2)}dw$$

$$= \frac{\sin[\pi(n-2)]}{2\pi(n-2)} - \frac{\sin[\pi(n+2)]}{2\pi(n+2)}$$

$$故\ h_o(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n=-2 \\ \frac{1}{2}, & n=2 \\ 0, & else \end{cases}$$

$h(0)=1$，$h(2)=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$$h(n) = \{\overset{\downarrow}{1}, 0, 1\}$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{2} h(n)e^{-jwn} = 1+e^{-j2w}$$

2.15 已知用差分方程 $y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$ 表示一个线性移不变系统，

（1）求该系统的系统函数，画出其零极点图并指出其收敛域；
（2）求该系统的单位抽样响应；
（3）此系统是一个不稳定系统，请找出一个满足上述差分方程的稳定的（非因果）系统的单位抽样响应。

(1) $Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z}{\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<|z|$$

极点为 $z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，零点为 0 和 $+\infty$

(2) $$\frac{H(z)}{z}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right) \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<|z|$$

故 $h(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n)$

(3) $$\frac{H(z)}{z}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right), \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<|z|<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

故 $h(n)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u(-n-1)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u(n)\right]$