

# 数字信号处理总复习

1. 离散时间信号与系统
2.  $z$ 变换与离散时间傅里叶变换
3. 离散傅里叶变换
4. 快速傅里叶变换
5. 数字滤波器基本结构
6. IIR数字滤波器设计
7. FIR三个字滤波器设计

# 1 离散时间信号与系统

1.1 离散时间信号

1.2 线性移不变系统

1.3 常系数线性差分方程

1.4 连续时间信号的抽样

# 1.1 离散时间信号

1.1.1 离散时间信号 – 序列

1.1.2 序列的运算

1.1.3 序列的线性卷积

1.1.4 序列的相关性

1.1.5 几种常用典型序列

1.1.6 序列的周期性

1.1.7 用单位抽样序列表示任意序列

# 1.1.1 离散时间信号 – 序列

- 序列定义

$$x(nT_s) = x(t) \Big|_{t=nT_s} \Rightarrow x(n)$$

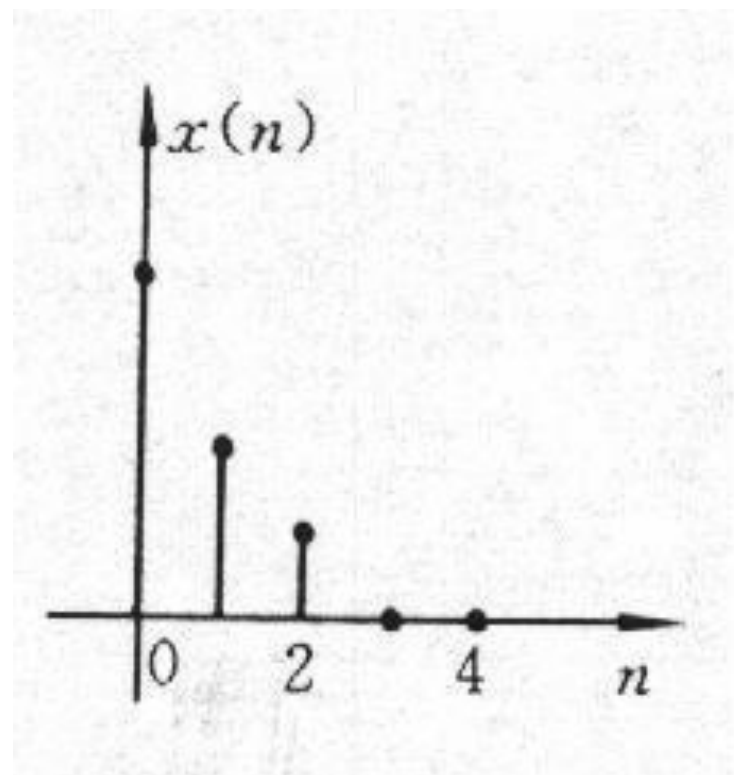
- 序列表示

- 图形表示、表达式

- 注意事项

$$x(n) = \{4, 2, 1, 0, 0; n = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

或  $x(n) = \{4, 2, 1, 0, 0\}$



## 1.1.2 序列运算

(1) 对序列变量  $n$  的运算

移位、翻褶、尺度变换

(2) 对幅度  $x(n)$  的运算

加法、乘法、累加

(3) 对幅度  $x(n)$  和变量  $n$  的运算

差分运算、卷积、相关（不要求）

## 1.1.3 序列的线性卷积（和）

设两个序列为  $x(n)$  和  $h(n)$ ，则其卷积和为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad -\infty < n < \infty$$

设序列  $x(n)$  的长度为  $N$

序列  $h(n)$  的长度为  $M$

则序列  $y(n)$  的长度为  $M + N - 1$

# 1.1.3 序列的线性卷积（和）

(1) 卷积的计算 – 相乘相加法

(2) 卷积的性质 – 交换律

## 1.1.4 序列的相关性

不要求！

## 1.1.5 几种常用的典型序列

- |   |        |   |
|---|--------|---|
| ① | 单位抽样序列 | $\delta(n)$                                   |
| ② | 单位阶跃序列 | $u(n)$  |
| ③ | 矩形序列   | $R_N(n)$                                      |
| ④ | 实指数序列  | $a^n u(n)$                                    |
| ⑤ | 复指数序列  | $e^{(\sigma + j\omega_0)n}$ $e^{j\omega_0 n}$ |
| ⑥ | 正弦型序列  | $A \sin(\omega n + \varphi)$                  |

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n) \\ e^{-j\omega n} = \cos(\omega n) - j \sin(\omega n) \end{cases}$$

## 1.1.6 序列的周期性

### ① 正弦序列的周期

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$$

$$N = \frac{2\pi k}{\omega_0} \quad \mathbf{N, k \text{ 均是整数}}$$

### ② 正弦序列的四则运算的周期

## 1.1.7 用单位抽样序列表示任意序列

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$x(n) = x(n) * \delta(n)$$

$$x(n) * \delta(n-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-n_0-m) = x(n-n_0)$$

# 1.2 线性移不变系统

1.2.1 线性系统

1.2.2 移不变系统

1.2.3 单位抽样响应

1.2.4 线性移不变系统的性质

1.2.5 因果系统

1.2.6 稳定系统

## 1.2.1 线性系统

- 满足叠加原理的系统称为线性系统
- 可加性，比例性

$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$

$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$

$$T[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$$

$$T[\alpha x(n)] = \alpha T[x(n)] = \alpha y(n)$$

$\alpha$  和  $\beta$  可以是实数、也可以是复数。

- 证明是线性系统
  - 必须同时满足可加性和比例性;
  - 或者: 必须满足叠加原理。
- 证明不是线性系统, 可以有三种方法:
  - 方法1: 找到一个反例, 不满足可加性, 或不满足比例性。
  - 方法2: 不满足零输入零输出性质
  - 方法3: 证明不满足线性性质  
(可加性、比例性、叠加原理)

## 1.2.2 移不变系统

- 系统响应与激励（输入）加于系统的时间无关

若系统的输入为  $x(n)$  ，输出为  $y(n)$

$$y(n) = T[x(n)]$$

则当系统的输入为  $x(n-m)$  ，输出为

$$T[x(n-m)] = y(n-m)$$

- 证明一个系统是移不变系统
  - 必须证明其满足移不变性质,

即  $T[x(n-m)] = y(n-m)$

说明:  $T[x(n-m)]$  表示将  $x(n)$  均换为  $x(n-m)$ ,  
然后加入到该系统的输出;

$y(n-m)$  表示将  $y(n)$  中  $n$  均换为  $n-m$

- 证明不是移不变系统, 可以有两种方法:
  - 方法1: 找到一个反例, 不满足移不变性质
  - 方法2: 直接证明不满足移不变性质

# 线性移不变系统（LSI）

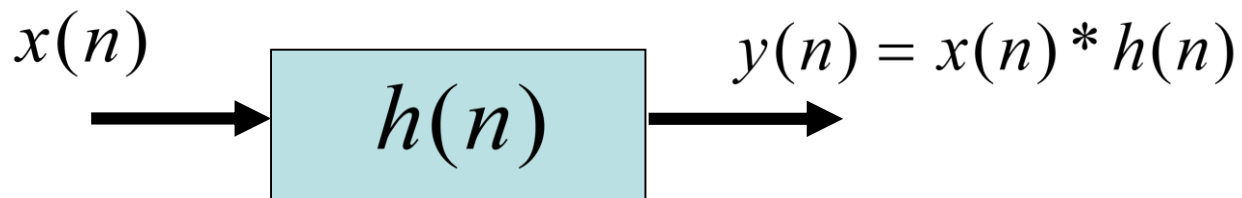
- 一个线性移不变系统，是指该系统同时是线性系统和移不变系统
- 该系统必须满足
  - 线性性质
  - 移不变性质
- 证明时，必须两者同时满足

## 1.2.3 单位抽样响应

- 输入为单位抽样序列时，线性移不变系统的输出

$$x(n) = \delta(n) \longrightarrow h(n) = T[\delta(n)] = y(n)$$

线性移不变系统的输出是系统的输入与单位抽样响应的（线性）卷积。



## 1.2.4 线性移不变系统的性质

### ① 交换律

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

### ② 结合律

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \end{aligned}$$

### ③ 分配律

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

## 1.2.5 因果系统

- 因果系统指某时刻系统的输出只能和当前时刻的输入、过去时刻的输入与输出有关，而不能和将来时刻的输入与输出有关

$$y(n) = f[x(n), x(n-k), y(n-m)]$$

$$k > 0, m > 0$$

- 线性移不变系统是因果系统的充分必要条件：

$$h(n) \equiv 0, n < 0 \quad \longrightarrow \quad h(n) = h(n)u(n)$$

## 1.2.6 稳定系统

- 稳定性是指系统有界输入产生有界输出

$$\text{若 } |x(n)| \leq M < \infty$$

$$\text{有 } |y(n)| \leq P < \infty$$

- 稳定性充分必要条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$$

即系统的单位抽样响应是绝对可和的

# 1.3 常系数线性差分方程

不要求！

# 1.4 连续时间信号的抽样

## 1.4.1 抽样

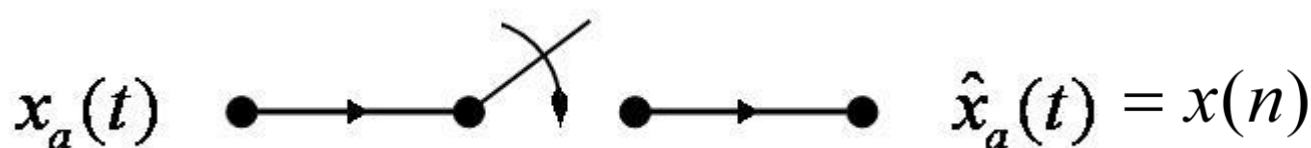
## 1.4.2 理想抽样与实际抽样

## 1.4.3 抽样定理

# 1.4.1 抽样

抽样

连续时间信号  离散时间信号



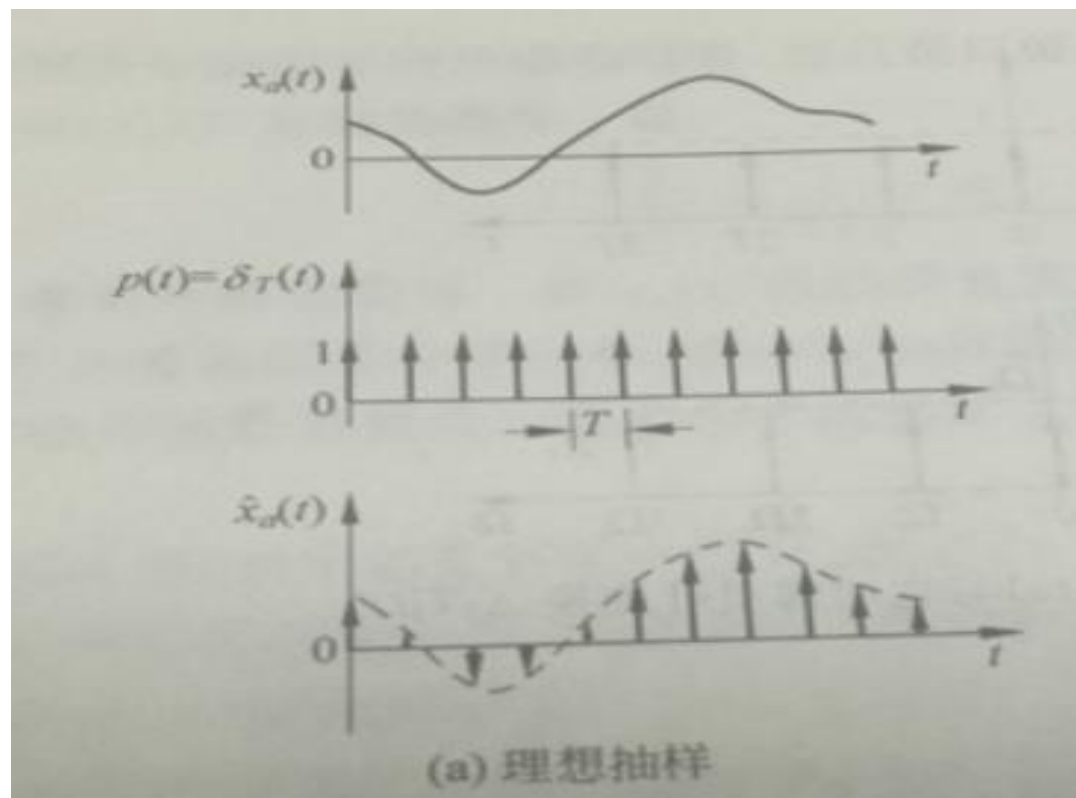
$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$$

## 1.4.2 理想抽样与实际抽样

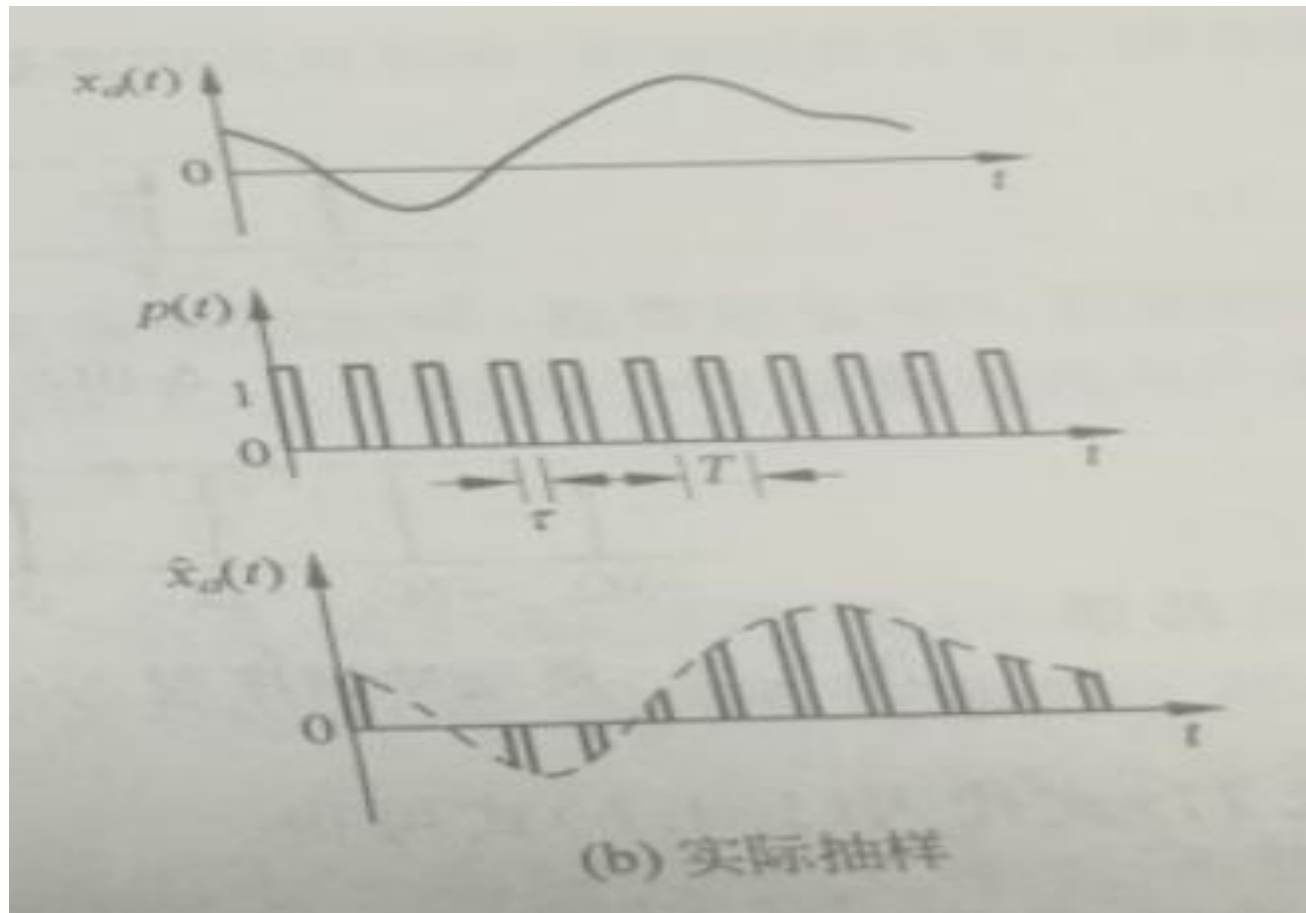
$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \bullet \delta_T(t) = x_a(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

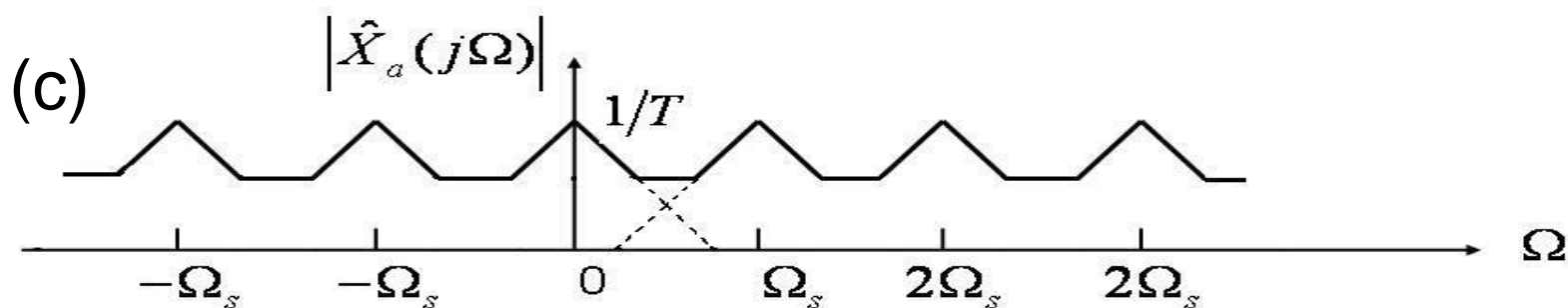
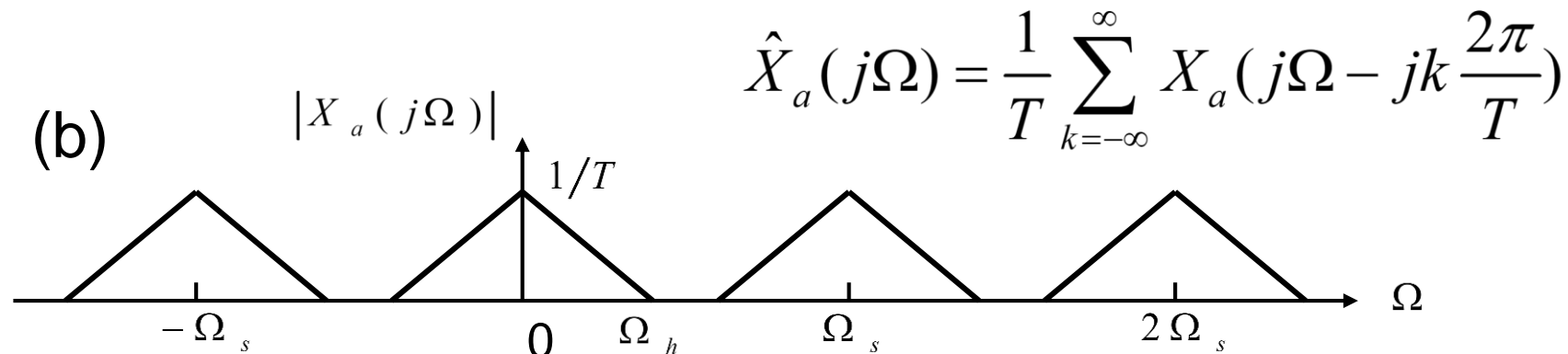
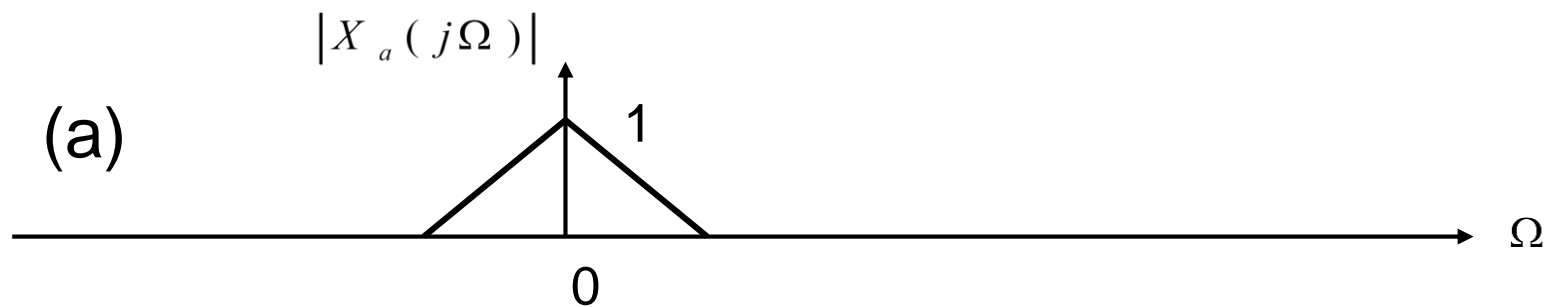
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(t - mT)$$



## 1.4.2 理想抽样与实际抽样



# 1.4.3 抽样定理



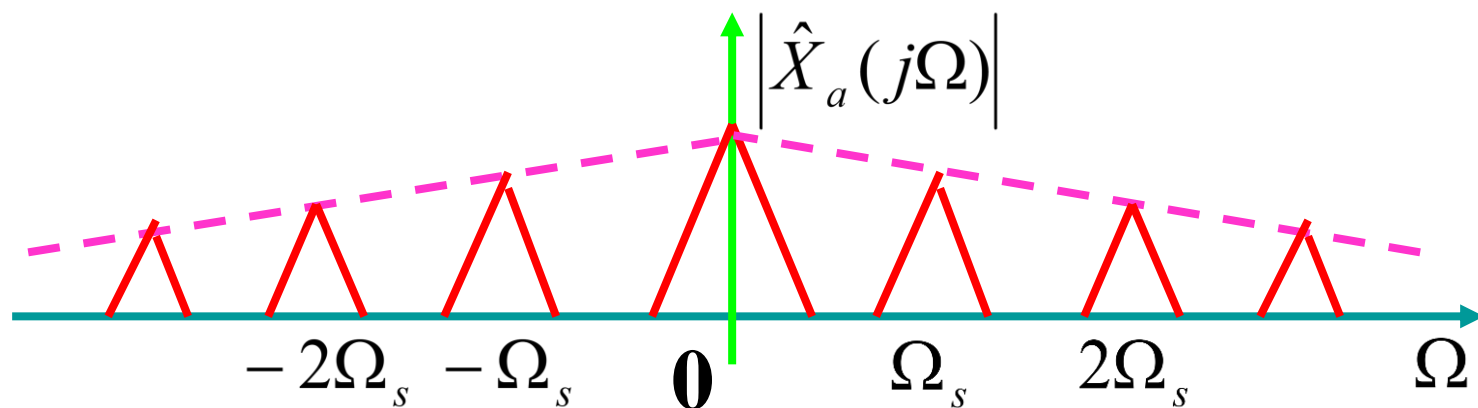
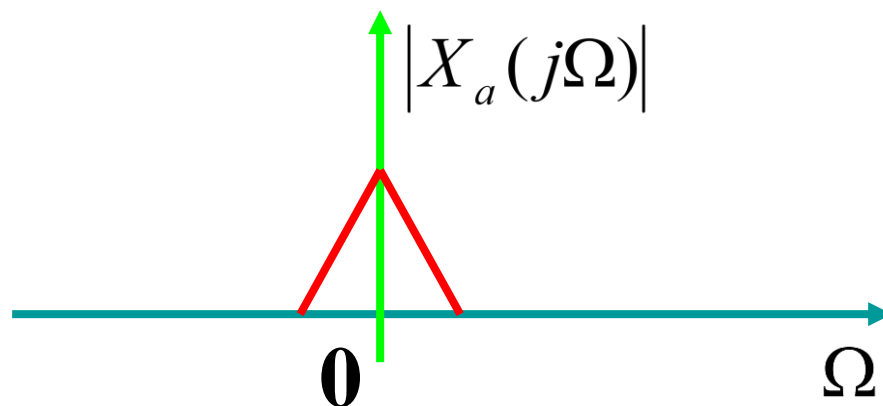
## 奈奎斯特抽样定理

若连续时间信号是带限的，要想抽样后能够不失真的还原信号，则抽样频率  $\Omega_s$  必须大于或等于信号谱的最高频率  $\Omega_h$  的两倍。

$$\Omega_s \geq 2\Omega_h \quad or \quad f_s \geq 2f_h$$

抽样信号的恢复

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega)$$



实际抽样时，频谱包络的变化，满足抽样定理

# 信号重建（恢复）

## 不要求！

## 2 $z$ 变换与离散时间傅里叶

2.1 序列的 $z$ 变换

2.2 离散时间傅里叶变换

2.3 几种变换之间的关系

2.4 离散系统的频域表征

# 2.1 序列的 $z$ 变换

2.1.1  $z$ 变换的定义

2.1.2  $z$ 变换的收敛域

2.1.3 典型序列的 $z$ 变换的收敛域

2.1.4  $z$ 反变换

2.1.5  $z$ 变换的性质

2.1.6 利用 $z$ 变换求解差分方程

## 2.1.1 z变换的定义

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$Z[x(n)] = X(z)$$

## 2.1.2 z变换的收敛域

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

只有上式的幂级数收敛，z变换才有意义。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

满足此式的z（|z|）的取值范围，称作z变换的收敛域（ROC，Region of convergence）。

收敛域具有“圆”，或“环”的形状。

## 2.1.3 典型序列的z变换的收敛域

- ① 有限长序列  $0 < |z| < \infty$
- ② 右边序列  $R_{x-} < |z| < \infty$
- ③ 因果序列  $R_{x-} < |z| \leq \infty, \quad |z| > R_{x-}$
- ④ 左边序列  $0 < |z| < R_{x+}$
- ⑤ 双边序列  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

## 2.1.4 z反变换

### 掌握部分分式法

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k z}{z - z_k}$$

$$(1) \quad \delta(n) \rightarrow 1 \quad 0 \leq |z| \leq \infty$$

$$(2) \quad a^n u(n) \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

$$(3) \quad -a^n u(-n-1) \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| < |a|$$

## 2.1.5 $z$ 变换的性质

1. 线性
2. 序列的移位
3. 乘以指数序列 ( $z$ 域尺度变换) (不要求)
4. 序列的线性加权 ( $z$ 域求导数)
5. 共轭序列 (不要求)
6. 翻褶序列

7. 初值定理

8. 终值定理

9. 因果序列的累加性（不要求）

10. 序列的卷积和

11. 序列相乘（ $z$ 域卷积定理）（不要求）

12. 帕塞瓦定理

## 2.1.6 利用z变换求解差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k z}{z - z_k}$$

$$h(n) = Z^{-1} [H(z)]$$

## 2.2 离散时间傅里叶变换

2.2.1 序列傅里叶变换定义

2.2.2 序列傅里叶变换的收敛性

2.2.3 序列傅里叶变换的主要性质

2.2.4 序列傅里叶变换的对称性质

2.2.5 周期性序列的傅里叶变换

# 信号的傅里叶变换

- 信号的傅立叶变换的结果就是该信号的频谱。按照时间  $t$ 、频率  $f$  的取连续值和离散值，可以有四种傅里叶变换形式：
  - ① 连续时间、连续频率 —— 傅里叶变换
  - ② 连续时间、离散频率 —— 傅里叶级数（变换）
  - ③ 离散时间、连续频率 —— 序列的傅里叶变换
  - ④ 离散时间、离散频率 —— 离散傅里叶变换

## 2.2.1 序列的傅里叶变换（DTFT）：

### Discrete Time Fourier Transform

定义：

正变换（DTFT）：

$$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换（IDTFT）：

$$IDTFT[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

序列的傅里叶变换反映了一个离散时间序列与其频谱之间的关系。

# DTFT讨论:

- 时域  $x(n)$  是离散的, 则频域  $X(e^{j\omega})$  是周期的  
周期为  $2\pi$
- 时域  $x(n)$  是非周期的, 其频域  $X(e^{j\omega})$  是变量  $\omega$  的连续函数。

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \quad \text{相位谱}$$

幅度谱

## 2.2.2 序列傅里叶变换的收敛性

序列傅里叶变换的收敛性，是指**DTFT**存在的条件：

$$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- 序列**x(n)**的**DTFT**一致收敛
- 序列**x(n)**的**DTFT**均方收敛

## 2.2.3 序列傅里叶变换的主要性质

### 1、线性

$$DTFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

### 2、序列的移位

$$DTFT[x(n-m)] = e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$$

### 3、乘以指数序列（不要紧）

## 2.2.3 序列傅里叶变换的主要性质

### 4、时域卷积定理

$$DTFT[x(n) * h(n)] = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

### 5、频域卷积定理（不要求）

### 6、序列的线性加权（不要求）

### 7、帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

## 2.2.3 序列傅里叶变换的主要性质

### 8、序列的翻褶

$$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

### 9、序列的共轭（不要求）

## 2.2.4 序列傅里叶变换的对称性质

(1) 共轭对称序列  $x_e(n)$

(2) 偶对称序列  $x_e(n)$

(3) 共轭反对称序列  $x_o(n)$

(4) 奇对称序列  $x_o(n)$

## 2.2.4 序列傅里叶变换的对称性质

任一序列 $x(n)$ 可以表示为一个共轭对称序列和共轭反对称序列之和：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

任一实序列 $x(n)$ 可以表示为一个偶对称序列和奇反对称序列之和：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中：

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)]$$

**性质16:** 若 $x(n)$ 是实序列, 则其傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  满足共轭对称性。

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad \leftarrow \text{幅度谱是 } \omega \text{ 的偶函数}$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \quad \leftarrow \text{相位谱是 } \omega \text{ 的奇函数}$$

## 2.2.5 周期性序列的傅里叶变换

不要求

## 2.3 几种变换之间的关系

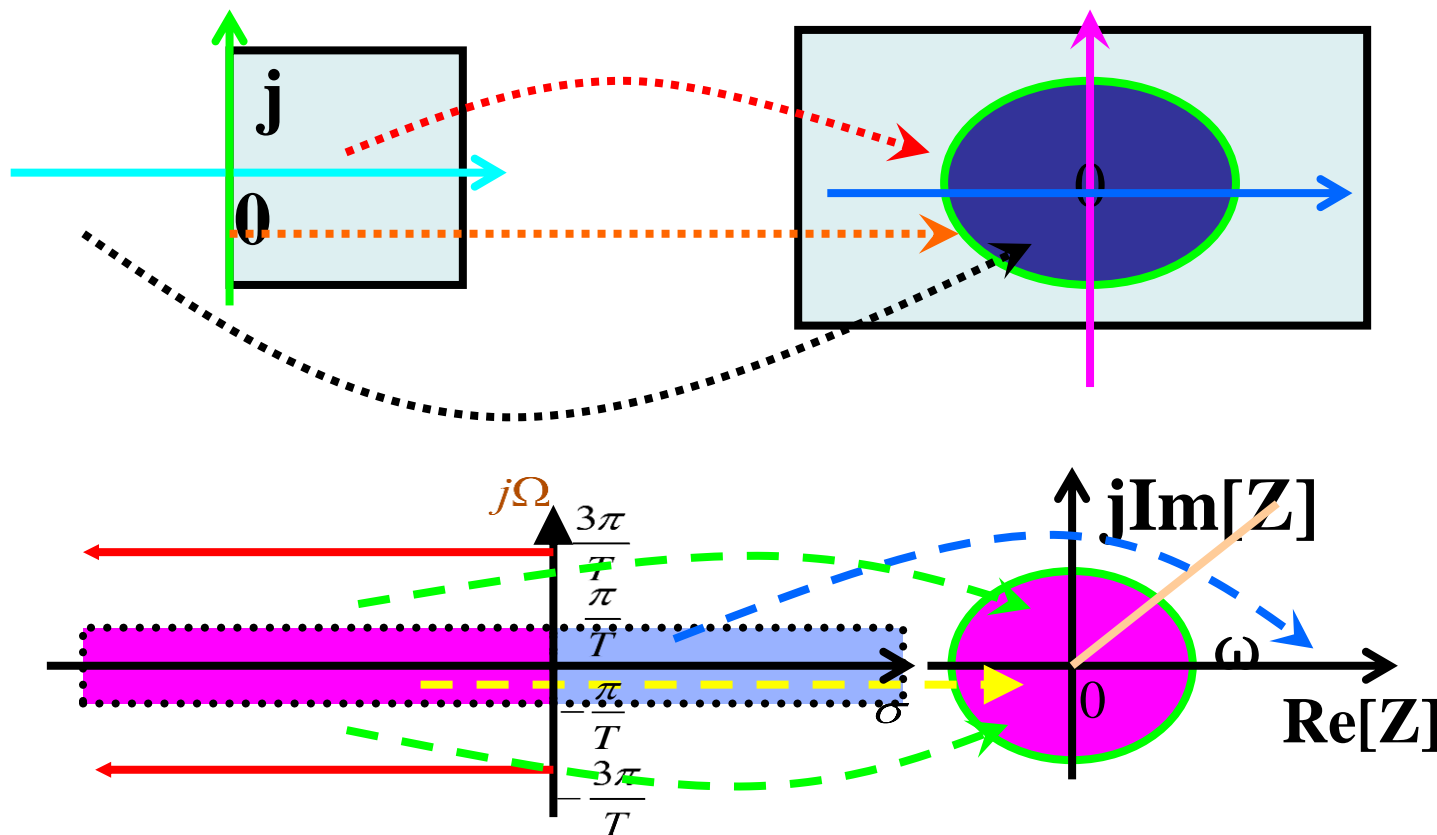
### 2.3.1 $z$ 变换与拉氏变换的关系

### 2.3.2 $z$ 变换与傅氏变换的关系

## 2.3.1 z 变换与拉氏变换的关系

当  $z = e^{sT}$ ，抽样序列的z变换就是其拉氏变换，

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s) \quad \text{S平面} \xleftrightarrow{\text{多值映射}} \text{Z平面}$$



## 2.3.2 z 变换与傅氏变换的关系

抽样序列在单位圆上的z变换，就等于其理想抽样信号的傅氏变换。

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(z = e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k)$$

# 数字频率 $\omega$ 与模拟角频率 $\Omega$ 关系

$$\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$$

$$\Omega : 0 \rightarrow 2\pi f_s$$

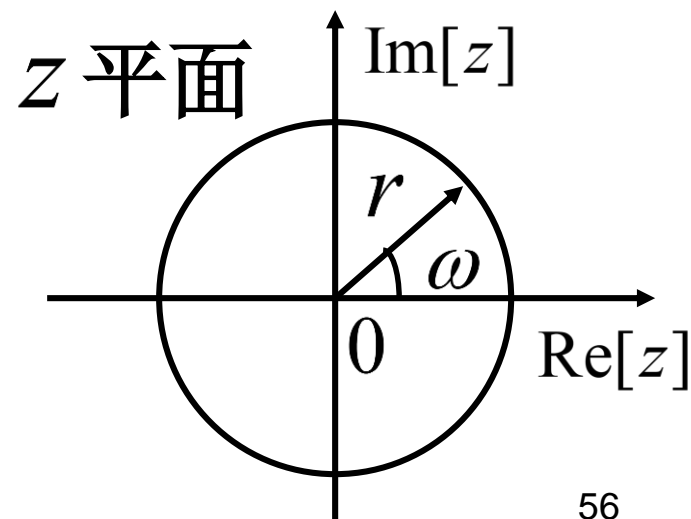
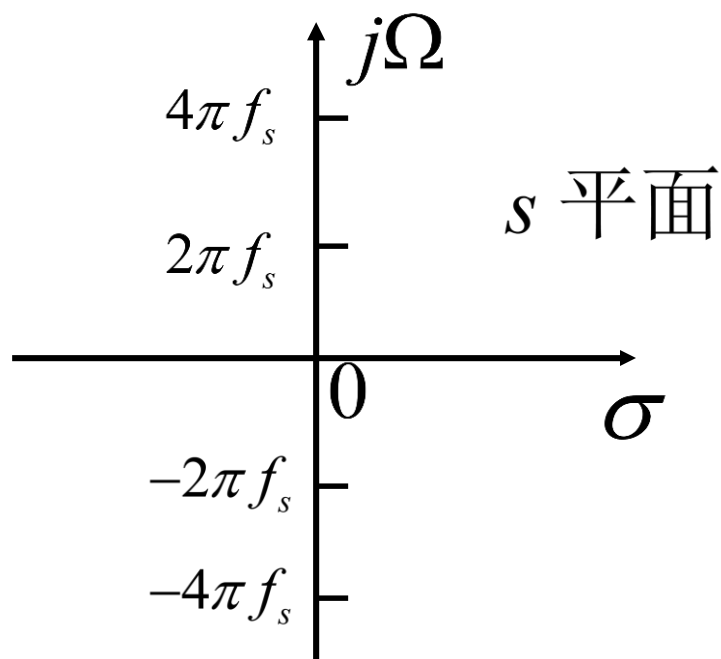
$$0 \rightarrow \Omega_s$$

$$\Omega_s \rightarrow 2\Omega_s$$

$$\omega : 0 \rightarrow 2\pi$$

$$0 \rightarrow 2\pi$$

$$2\pi \rightarrow 4\pi$$



## 2.4 离散系统的频域表征

### 2.4.1 LSI系统的描述

### 2.4.2 LSI系统的因果稳定条件

### 2.4.3 LSI系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的特点

### 2.4.4 LSI系统频率响应的几何确定法

## 2.4.1 LSI系统的描述

- LSI系统 – 离散线性移不变系统
  - 可以从时域和频域两个方面来描述

### 1. LSI系统的时域描述

- 用单位抽样响应  $h(n)$  表征
- 用常系数线性差分方程表征

### 2. LSI系统的频域描述

- 用系统函数  $H(z)$  表征
- 用频率响应  $H(e^{j\omega})$  表征

# 1 LSI系统的时域描述

(1) 用单位抽样响应  $h(n)$  表征

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

(2) 用常系数线性差分方程表征

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

系数  $a_k$ ,  $b_m$  必须是常数

## 2 LSI系统的频域描述

(1) 用系统函数  $H(z)$  表征

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

当系统的初始状态为 0 时，对差分方程进行z变换

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

因式分解:

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

系统函数完全由其极点  $d_k$  和零点  $c_m$  确定。

收敛域不同，对应的系统不同。故要确定一个系统，除了有系统函数（差分方程）外，还要给出收敛域。

## (2) 用频率响应 $H(e^{j\omega})$ 表征

若系统函数在z平面单位圆上收敛，则当  $z = e^{j\omega}$

$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$  存在，称之为系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j\omega m}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

系统频率响应是由系统本身确定的，与系统的输入输出没有关系！

## 2.4.2 LSI系统的因果、稳定条件

### 1. 时域（充要）条件

因果性

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad h(n) \text{ 是因果序列}$$

稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad h(n) \text{ 是绝对可和的}$$

## 2、频域（充要）条件

### (1) 线性移不变系统稳定的充要条件:

若系统函数收敛域包括单位圆，则系统是稳定的；反之，若系统是稳定的，则收敛域包括单位圆。

### (2) 线性移不变系统是因果系统的充要条件

因果系统的单位抽样响应是因果序列，因果序列的  $z$  变换的收敛域为

$$R_{x-} < |z| \leq \infty \quad \text{或} \quad |z| > R_{x-}$$

(3) 一个因果稳定的系统函数的收敛域:

综合以上两点, 可以得出结论: 一个因果稳定的线性移不变系统的系统函数的收敛域为:

$$R_- < |z| \leq \infty \quad R_- < 1$$

系统函数的极点必须在单位圆内!

## 2.4.3 LSI系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的特点

### 1、频率响应

系统的频域响应  $H(e^{j\omega})$  是指线性移不变系统对复指数序列的稳态响应。

即输入为  $x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$

输出为  $y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$

## 2、频率响应的特点

(1) 只要单位抽样响应 $h(n)$ 绝对可和，则

$H(e^{j\omega})$  一定存在，若 $h(n)$ 非周期则连续；

$H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的连续函数。

(2) 当  $h(n)$  是实序列时，频率响应的幅度

响应  $|H(e^{j\omega})|$  是偶函数，相位响应

$\arg[H(e^{j\omega})]$  是奇函数。

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|, \quad \arg[H(e^{j\omega})] = -\arg[H(e^{-j\omega})]$$

(3) 频率响应  $H(e^{j\omega})$  是周期函数

$$H(e^{j\omega}) = H\left[e^{j(\omega+2\pi i)}\right]$$

频率响应是以  $2\pi$  的整数倍为周期的。

(4) 在一个周期  $(-\pi, \pi)$  中,  $\omega = 0$  表示  
低频,  $\omega = \pi$  表示高频

(5) 输入:  $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$

输出:

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos \{ \omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})] \}$$

输入:  $x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$

输出:

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \sin \{ \omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})] \}$$

## (7) LSI系统的频率响应

- **LSI**系统的输出序列的傅里叶变换是输入序列的傅里叶变换与系统的频率响应的乘积

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$DTFT[y(n)] = DTFT[x(n) * h(n)]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

故：卷积运算只包含两个信号所共有的频率分量。

## 2.4.4 频率响应的几何确定法

- 系统的频率响应表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$

基于  $|H(e^{j\omega})|$  ，可以看出系统的特性。

例如： 是哪一种类型的数字滤波器。

**LP, HP, BP, BS** ?

# 3 离散傅里叶变换

## 3.1 傅里叶变换的四种形式

## 3.2 周期序列的傅里叶变换

## 3.3 离散傅里叶变换

## 3.4 离散傅里叶变换的性质

## 3.5 频域抽样理论

## 3.6 DFT应用

# 3.1 傅里叶变换的四种形式

傅里叶变换是将一个信号从时域分析变换到频域进行分析处理的一种变换。

傅里叶变换的四种形式（时间频率取连续离散值）

1. 连续时间、连续频率 — 傅里叶变换
2. 连续时间、离散频率 — 傅里叶级数（变换）
3. 离散时间、连续频率 — 序列的傅里叶变换
4. 离散时间、离散频率 — 离散傅里叶变换

# 3.1.1 连续时间、连续频率 ——傅里叶变换 (FT)

连续时间非周期信号  $x(t)$  的傅里叶变换

$X(j\Omega)$  之间的关系:  $X(j\Omega) = FT[x(t)]$

正变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

## 3.1.2 连续时间、离散频率 ——傅里叶级数 (FS)

连续时间周期信号  $x(t)$  可以展开为傅里叶级数，其傅里叶系数  $X(jk\Omega_0)$  与  $x(t)$  之间的关系为：

傅里叶系数 
$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

傅里叶级数 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

$\Omega_0 = 2\pi / T_0$     基频     $k\Omega_0$     谐波分量

## 3.1.2 连续时间、离散频率 ——傅里叶级数 (FS)

连续时间周期信号  $x(t)$  可以展开为傅里叶级数，其傅里叶系数  $X(jk\Omega_0)$  与  $x(t)$  之间的关系为：

傅里叶系数 
$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

傅里叶级数 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

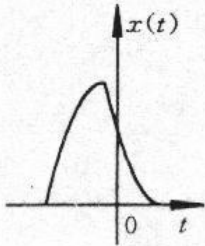
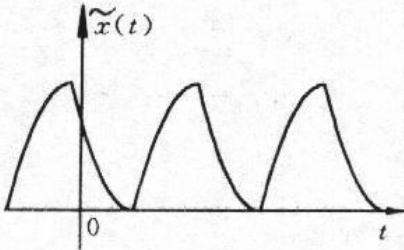
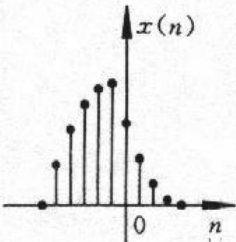
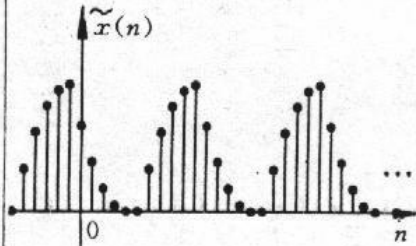
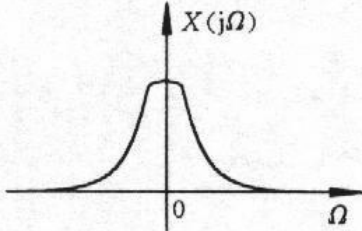
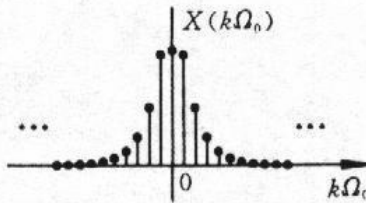
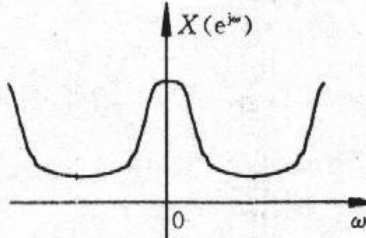
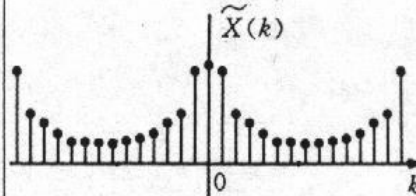
$\Omega_0 = 2\pi / T_0$     基频     $k\Omega_0$     谐波分量

### 3.1.4 离散时间、离散频率 ——离散傅里叶变换 (**DFT**)

按照时间变量和频率变量是连续还是离散的不同组合，

- 必存在时间变量和频率变量都是离散的情况，即离散傅里叶级数变换**DFS**。
- 即：时域是离散的周期序列，对应的频域也是离散和周期的。
- 特例：时域和频域均取有限长N点，则为离散傅里叶变换**DFT**

# 四种傅里叶变换

	连续 非周期		连续 周期		离散 非周期		离散 周期	
时域	 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$		 $X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$		 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$		 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$	
	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$  <p>(FT)</p>		$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$  <p>(FS)</p>		$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$  <p>(DTFT)</p>		$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$  <p>(DFS)</p>	
	连续 非周期		离散 非周期		连续 周期		离散 周期	

## 3.2 周期序列的离散傅里叶级数

### Discrete Fourier Sequences (DFS)

#### 3.2.1 DFS的定义

周期序列满足,  $x(n) = x(n + rN)$ ,  $r$  是任意整数

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad -\infty < k < \infty$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad -\infty < n < \infty$$

采用记号： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

傅里叶级数（正）变换（**DFS**）

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

傅里叶级数反变换（**IDFS**）

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

$$-\infty < k < \infty; \quad -\infty < n < \infty$$

## 3.2.2 离散傅里叶级数的性质

(不要求)

# 3.3 离散傅立叶变换 ( DFT )

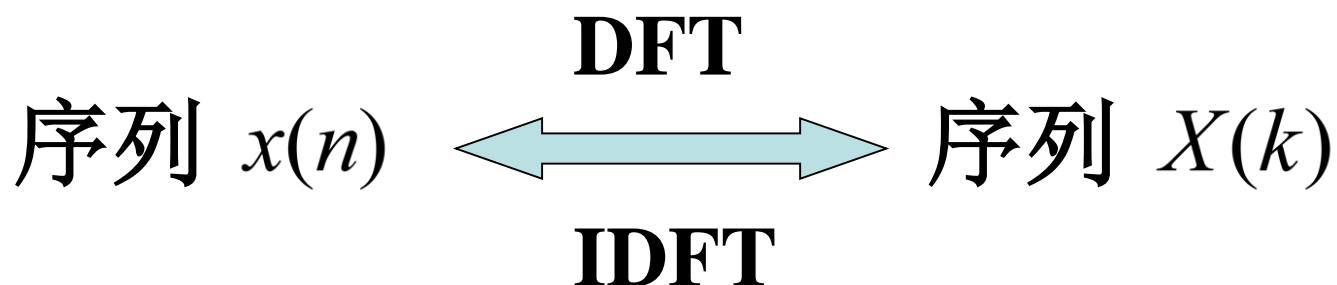
## 有限长序列的傅里叶变换


### 正变换

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \tilde{X}(k) R_N(k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

### 反变换

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \tilde{x}(n) R_N(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$



有限长  $x(n)$  长度 $N$ ,  隐含周期性  
周期序列  $\tilde{x}(n)$  周期为 $N$

有限长  $X(k)$  长度 $N$ ,  隐含周期性  
周期序列  $\tilde{X}(k)$  周期为 $N$

## 3.4 离散傅立叶变换的性质

**DFT**的性质，和**DFS**的性质基本一致。包括

1. 线性
2. 序列的圆周移位
3. 对称定理（对偶性）（不要求）
4. 反转定理（不要求）
5. 序列的总和

- 6. 序列的初始值
- 7. 延长序列的离散傅里叶变换
- 8. 共轭对称
- 9. DFT形式下的帕塞瓦定理
- 10. 圆周卷积和
- 11. 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

# 一、 线性

设两个有限长序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  ， 则

$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

其中，  $a, b$  为任意常数（实数或复数）。

问题： 两个序列长度问题如何考虑？

## 二、 序列的圆周（循环）移位

◆ 序列移位：  $x(n-m)$

◆ 圆周移位的定义：

一个有限长序列  $x(n)$  的圆周移位指用它的长度  $N$  为周期，进行周期延拓得周期序列  $\tilde{x}(n)$ ，将周期序列  $\tilde{x}(n)$  进行移位，然后取主值区间  $[0, N-1]$  上的序列值。

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

# 圆周移位性质：

有限长序列  $x(n), 0 \leq n \leq N-1$  ,

若 
$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

则 
$$\begin{aligned} X_m(k) &= DFT[x_m(n)] \\ &= DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

**三、对偶性（对称定理）（不要求）**

**四、反转（褶）定理（不要求）**

## 五、序列的总和

时间序列  $x(n)$  中各取样值的总和等于其离散傅里叶变换为  $X(k)$  在  $k=0$  时的值。

$$X(0) = X(k) \Big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \Big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

序列的均值（直流分量）

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \frac{1}{N} X(0)$$

## 六、序列的初始值

若  $x(n)$  的离散傅里叶变换为  $X(k)$ ，则  $x(n)$  的初始值  $x(0)$  为频谱序列各取样值  $X(k)$  的总和除以  $N$ 。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$\therefore x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

# 七、延长序列的离散傅里叶变换

## 1 填充零至整数倍长度

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases} \quad G(k) = X\left(\frac{k}{r}\right), \quad k = 0, 1, \dots, rN-1$$

## 2 填充零至任意长度

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad G(k) = X\left(\frac{N}{L}k\right), \quad k = 0, 1, \dots, L-1$$

补零不能提高频率分辨率，但可以缓解（克服）栅栏效应，便于FFT计算。

# 八、 共轭对称性

有限长序列  $x(n)$  的圆周共轭对称分量  $x_{ep}(n)$  和圆周共轭反对称分量  $x_{op}(n)$  定义为:

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((N-n))_N] R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N - x^*((N-n))_N] R_N(n)$$

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

- 有限长序列的奇对称和偶对称

若序列是奇对称的， 即

$$x(n) = -x(N-n)$$

若序列是偶对称的， 即

$$x(n) = x(N-n)$$

# 判断有限长序列对称性的方法

- 对于一个**N**点时实序列

$$\{x(n), 0 \leq n \leq N-1\}$$

- 判断**x(n)**的对称性简单方法是
  - 将**n=N**处序列值补上**n=0**处的序列值  $x(N) = \pm x(0)$
  - 如果新序列对于**n=N/2**是偶（奇）对称的
  - 则原序列就是偶（奇）对称的
  - 否则，就不是偶（奇）对称的

# 对称性质：实序列的DFT

若  $x(n)$  是实序列，则  $X(k)$  只有圆周共轭对称分量，即满足

$$X(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$$

即：幅度谱偶对称，相位谱奇对称

## 10、 DFT形式下的帕赛瓦定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。

# 11、 圆周卷积和

设  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  都是长度为N的有限长序列 (  $0 \leq n \leq N-1$  )

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)], \quad X_2(k) = DFT[x_2(n)]$$

若  $Y(k) = X_1(k) \bullet X_2(k) \quad y(n) = IDFT[Y(k)]$

$$x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$x_2(n) \textcircled{N} x_1(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

# 12、有限长序列的线性卷积 与圆周卷积和

## (1) 线性卷积

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)x_1(n-m)$$

$x_1(n)$  的非零区间为  $0 \leq n \leq N_1 - 1$

$x_2(n)$  的非零区间为  $0 \leq n \leq N_2 - 1$

$y_l(n)$  的非零区间为  $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$

## (2) 圆周卷积

考虑  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的  $L$  点的圆周卷积。

$$y(n) = \left[ \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) = \left[ \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)$$

故  $L$  点圆周卷积  $y(n)$  是线性卷积  $y_l(n)$  以  $L$  为周期的周期延拓序列的主值序列。

故L点圆周卷积  $y(n)$  与 线性卷积  $y_l(n)$  相等的充要条件为:

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

此时,

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n),$$

结论: 若,  $L \geq N_1 + N_2 - 1$ , L点圆周卷积能代表线性卷积。

# 13、线性相关与圆周相关

( 不 要 求 )

## 3.6 频谱抽样理论

### 5. 频率抽样定理

序列  $x(n)$  的长度为  $M$  点，对其频谱  $X(e^{j\omega})$  在  $0 \leq \omega < 2\pi$  上进行等  $N$  点间隔抽样（抽样点不包括  $\omega = 2\pi$ ）得到  $\tilde{X}(k)$ ，其反变换  $\tilde{x}_N(n)$  的主值区间为

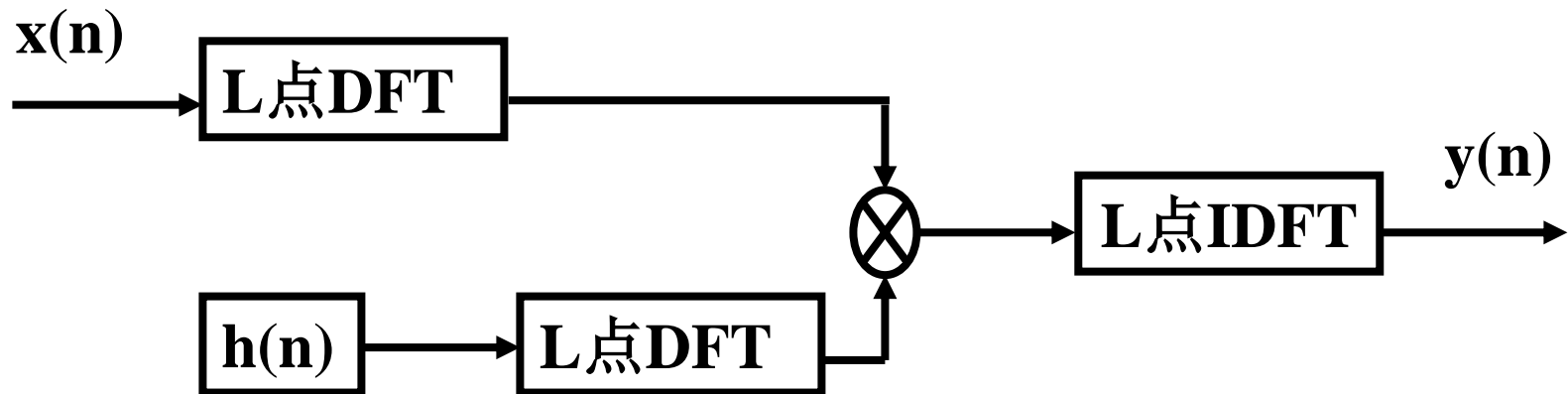
$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)R_N(n)$$

当：  $N \geq M$  时，  $x_N(n) = x(n)$

即：能无失真恢复原信号。

## 3.7 DFT的应用

### 采用DFT办法求解线性卷积



# 利用DFT计算模拟信号可能出现的几个问题

模拟信号  $\rightarrow$  离散时间信号

问题1：频率响应的混叠失真与参数的选择

问题2：频率泄漏

问题3：栅栏效应

问题4：频率分辨力

# 4 快速傅里叶变换

- 4.1 引言（不要求）
- 4.2 直接计算**DFT**的问题及改进途径
- 4.3 按时间抽取（**DIT**）的基-2 **FFT**算法（库利-图基算法）
- 4.4 按频率抽取（**DIF**）的基-2 **FFT**算法（桑德-图基算法）
- 4.5 离散傅里叶反变换的快速算法
- 4.6 线性卷积的**FFT**算法

## 4.2 直接计算DFT的问题及改进途径

- 有限长序列  $x(n)$  的DFT及IDFT为,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- N个DFT值的计算量为:

复数乘法:  $N^2$

复数加法:  $N(N-1)$

# 1 DFT的计算量

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

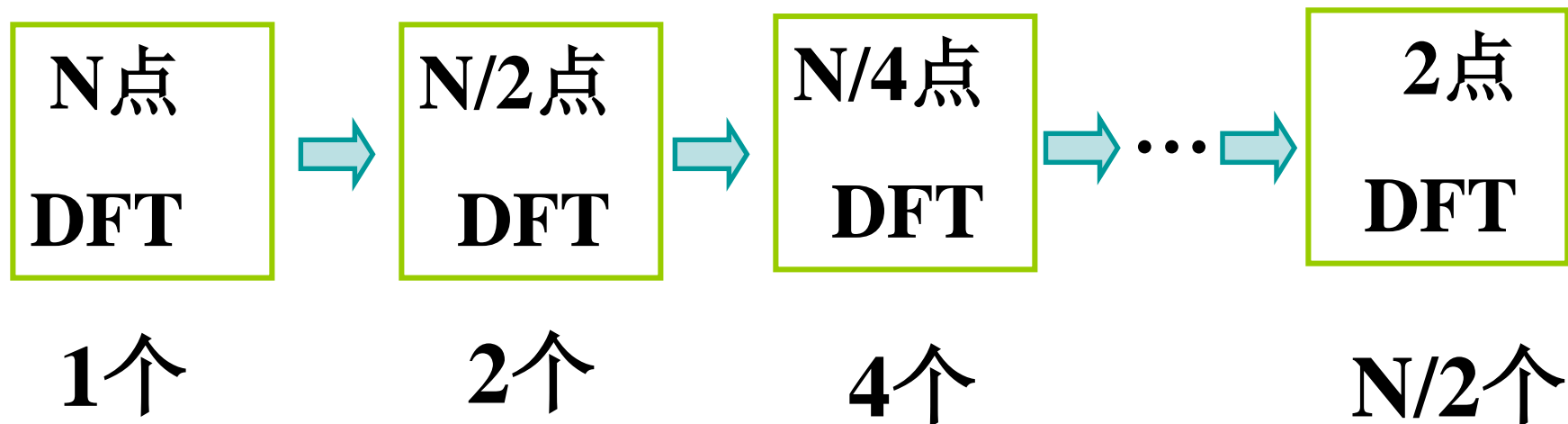
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- 求全部N个DFT值，需要的计算量为：

复数乘法：  $N^2$

复数加法：  $N(N-1)$

# FFT的核心思想是：



DFT的复数乘法计算量： $N^2$

N越小，计算量越小！（N为2的幂次方）

快速傅里叶变换（FFT）即由此产生！

前提：DFT计算结果正确

## 4.3 按时间抽取（DIT）的基-2 FFT算法（库里-图基法）

一、算法原理

二、运算量

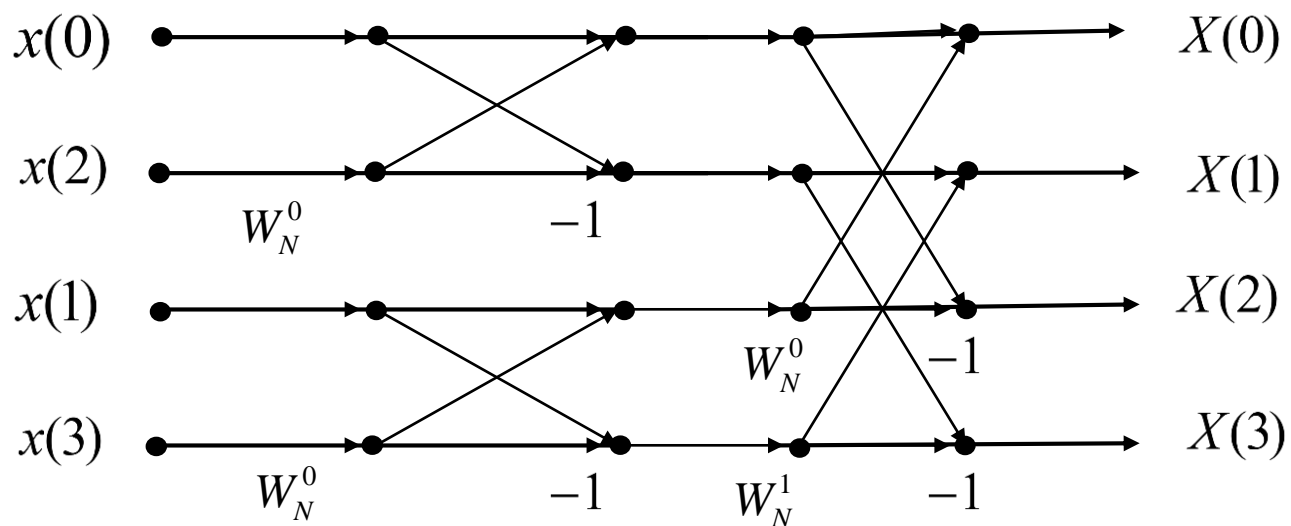
三、按时间抽取的FFT特点

四、按时间抽取的FFT算法的其它形式

# 一、算法原理

- 序列  $x(n)$  的长度为:  $N = 2^L$  ,  $L$  为正整数
- 如果不满足要求, 则补零。
- $N$  为 2 的整数幂的 FFT 称作基-2 FFT。

时间抽取法就是将  $N = 2^L$  的序列  $x(n)$  按照  $n$  的奇(odd)偶(even)分成两部分:



4点DIT基2 FFT运算流图

## 二、运算量

1. 时间抽取法FFT，当  $N = 2^L$ ，有L级（列）蝶形，每一级有N/2个蝶形运算。

2. 每一个蝶形运算的计算量：

复数乘法： 1      复数加法： 2

3. 每一级蝶形运算的计算量：

复数乘法： N/2      复数加法： N

4. 全部蝶形运算的计算量：

复数乘法：  $\frac{N}{2}L = \frac{N}{2}\log_2 N$       复数加法：  $NL = N\log_2 N$

## 二、按时间抽取FFT的特点

1. 原位运算（同址运算）
2. 倒位序规则
3. 倒位序的实现（不要求）
4. 蝶形运算两结点之间的距离（不要求）
5. 系数  $W_N^r$  的确定（不要求）
6. 存储单元（不要求）

## 四、DIT的FFT算法的其他形式流图

- 有多种形式的FFT流图，  
即流图不唯一！
- 具体流图不要求，只要  
求掌握4点标准流图！

## 4.3 频率抽取(DIF)基 2 算法

按频率抽取（DIF）的FFT算法，即把输出序列  $X(k)$  按照  $k$  的奇偶进行分解。

序列长度  $N = 2^L$  ,  $L$ 为整数

一、算法原理

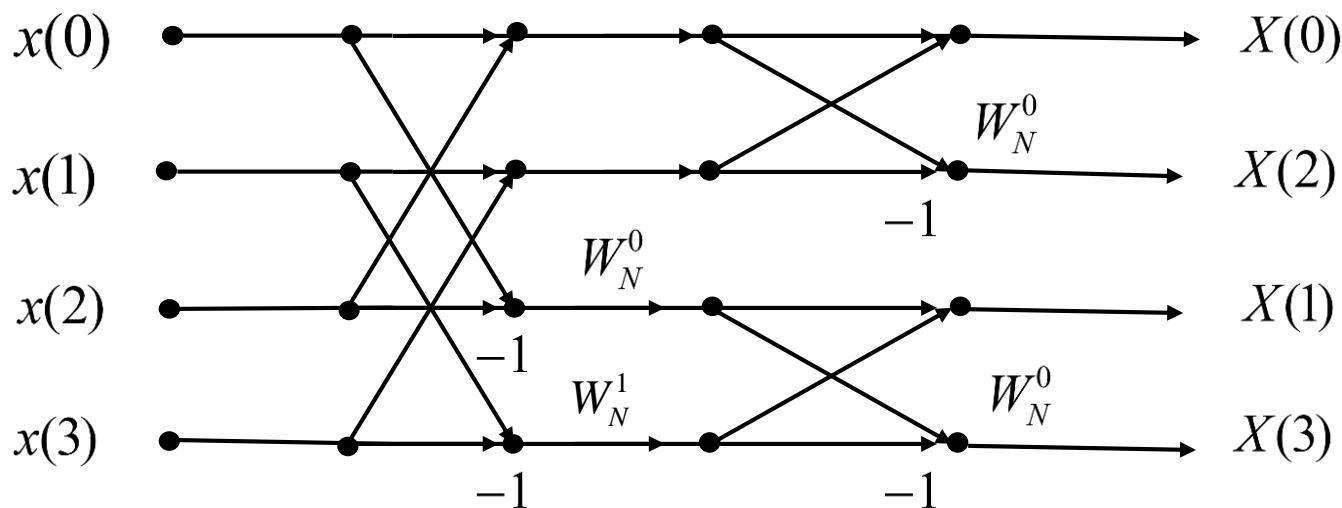
二、运算量

三、频率抽取的FFT特点

四、频率抽取的FFT算法的其它形式

# 一、算法原理

1. 将DFT的计算公式，不是按照  $n$  的奇偶进行分解，而是按照前后两部分进行分解。
2. 对DFT的计算公式，按照序号  $n$  的前后部分进行计算，效果就是等效于序号  $k$  按照奇偶进行分解。



4点DIF基2 FFT流图

## 二、运算量

- 每一个蝶形运算量：
  - 复数乘法：1次
  - 复数加法：2次
- L级蝶形运算，每一级N/2个蝶形运算，故总运算量为：
  - 复数乘法： $\frac{N}{2} \log_2 N$
  - 复数加法： $N \log_2 N$
- 与DIT法计算量完全相同。

## 五、DIF与DIT的异同

- 比较DIT和DIF流图，

- (1) DIT，输出顺位序（自然顺序），输入倒位序

- (2) DIF，输出倒位序，输入顺位序。

- (3) DIF的基本蝶形与DIT的基本蝶形不同。

**DIF在先作减法后作复数乘法，**

**DIT先作复乘后作加减法。**

**相同点：**

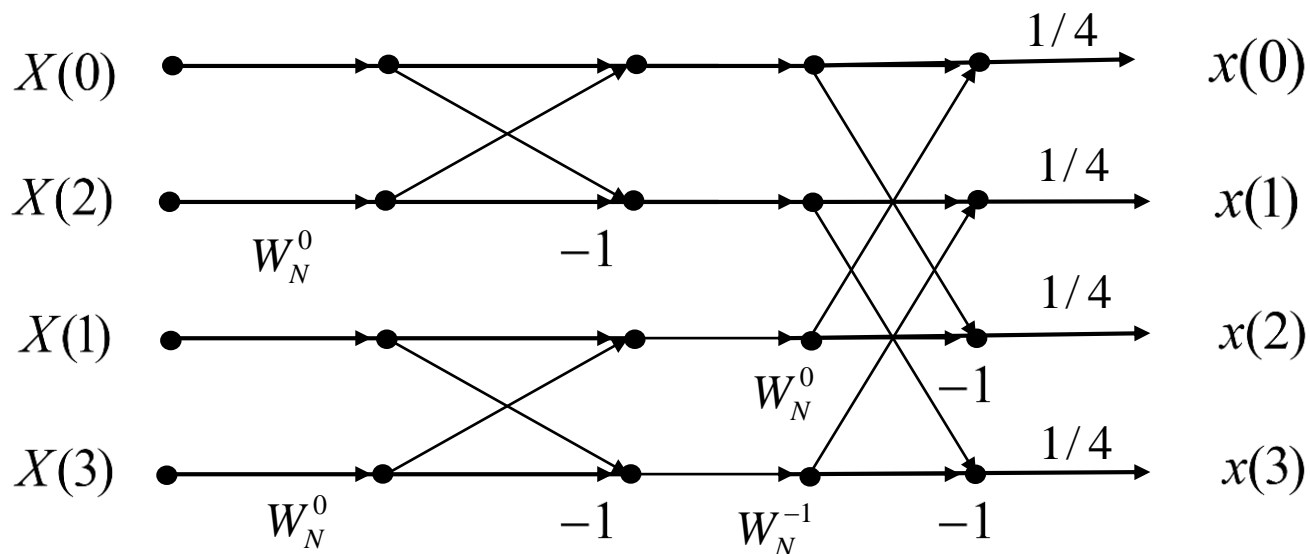
- 1) DIF与DIT的运算量相同，有L级运算，每级运算需 $N/2$ 个蝶形运算完成，每一个蝶形运算有 1 个复数乘法和 2 个复数加法，总共需要  $\frac{N}{2} \log_2 N$  次复乘，  $N \log_2 N$  次复加 。**
- 2) 都可以进行原位运算。**

## 4.4 IDFT的快速计算方法

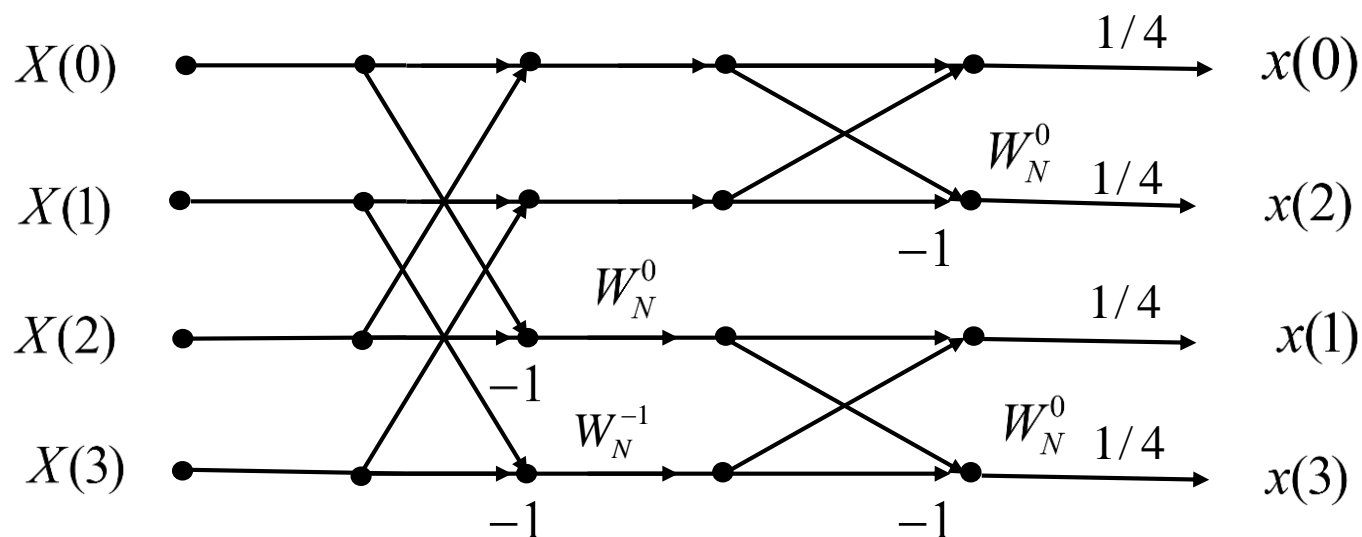
$$\text{DFT} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

**把DFT运算中的每一个系数  $W_N^{nk}$  换成  $W_N^{-nk}$ ，然后再乘以1/N，则前边DIT或DIF的FFT都可以被利用来运算IDFT。**



**4点DIT基2 IFFT运算流图**



**4点DIF基2 IFFT流图**

# 完全不用改变FFT的程序计算IFFT的方法： IDFT为

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N} DFT[X^*(k)]$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \left\{ DFT[X^*(k)] \right\}^*$$

先将X(k)取共轭，直接利用FFT计算程序，最后再将运算结果取一次共轭，并乘以1/N，就可得x(n)。

## 4.5 线性卷积的FFT算法

- 线性移不变系统，输入 $x(n)$ 为 $L$ 点，单位抽样响应 $h(n)$ 为 $M$ 点，输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n-m)$$

- $y(n)$ 也为有限长序列，点数 $L+M-1$ 点。
- 运算量：乘法次数 $m_d = LM$ 次。

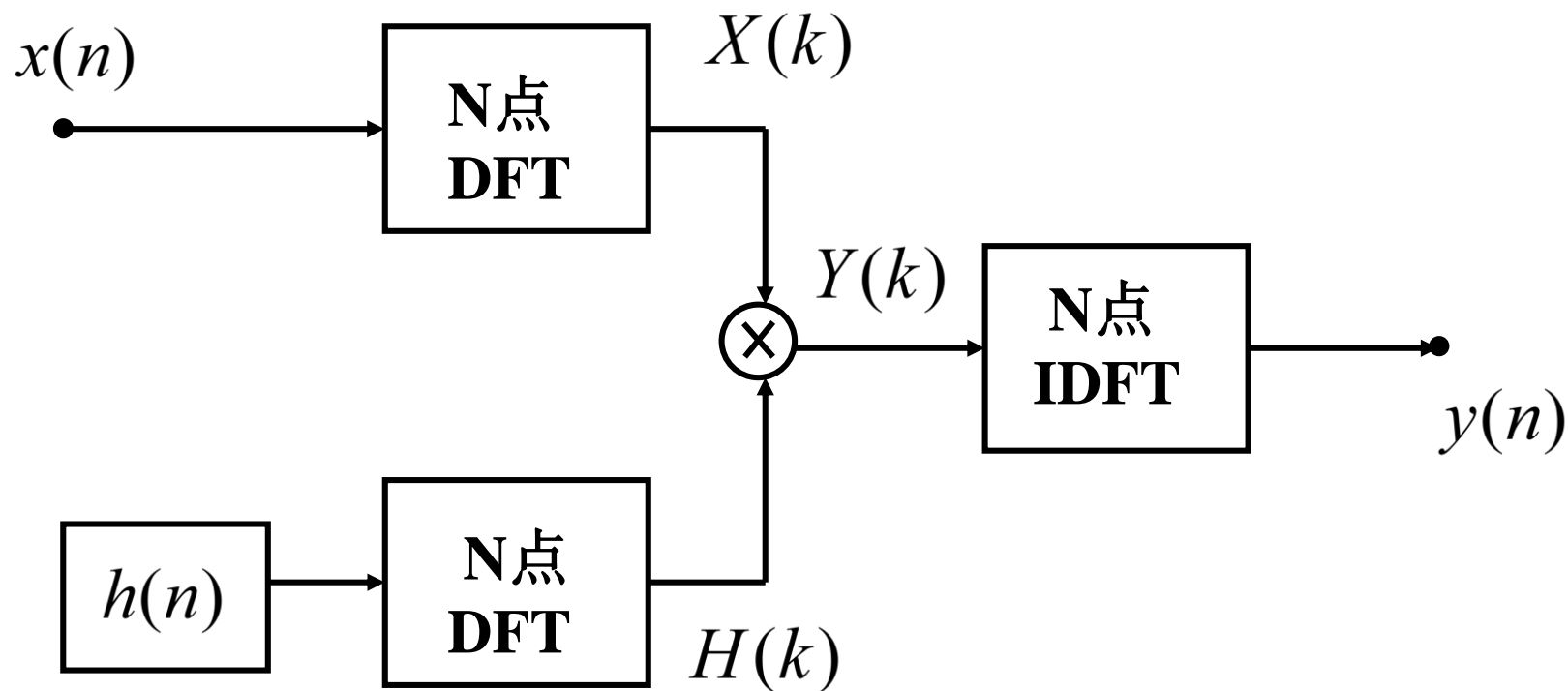
## 线性卷积的FFT算法：

就是用圆周卷积代替线性卷积；

为了不产生混叠，充分条件是将 $x(n)$ ， $h(n)$ 补零补到 $N=M+L-1$ 。

首先计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的FFT，然后计算两者的乘积，最后计算IFFT得到 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的圆周卷积，所得结果就是 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积。

# FIR滤波器的快速卷积结构



$$Y(k) = X(k) \bullet H(k)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

## 计算步骤:

- (1) 求  $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$ , N点FFT;
- (2) 求  $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ , N点FFT;
- (3) 计算  $Y(k) = X(k) H(k)$ ;
- (4) 求  $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$ , N点FFT。

步骤(1), (2), (4)可以利用FFT完成。

## 运算量:

### 乘法次数

$$m_F = \frac{3}{2} N \log_2 N + N = N(1 + \frac{3}{2} \log_2 N)$$

# 1 重叠相加法

不要求

# 5 数字滤波器的基本结构

- 5.1 无限长单位冲激响应 (**IIR**) 系统和有限长单位冲激响应 (**FIR**) 系统
- 5.2 数字滤波器结构的表示方法
- 5.3 无限长单位冲激响应 (**IIR**) 滤波器的基本结构
- 5.4 有限长单位冲激响应 (**FIR**) 滤波器的基本结构

## 5.1 无限长单位冲激响应 (IIR) 系统和有限长单位冲激响应 (FIR) 系统

一个线性移不变系统，三种表示方法

卷积  $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)$

系统函数  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$

差分方程  $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$

## 数字系统的两种形式:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

1. 若系统的单位抽样（冲激）响应  $h(n)$  延伸到无穷长(  $-\infty < n < \infty$  ), 则称为无限长单位冲激响应 (**Infinite Impulse Response**) 系统, 简称**IIR**系统。
2. 若系统的单位抽样（冲激）响应  $h(n)$  是一个有限长序列 (  $0 \leq n \leq N-1$  ), 则称为有限长单位冲激响应 (**Finite Impulse Response**) 系统, 简称**FIR**系统。

系统函数归一化为：

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

如果分母多项式有一个系数  $a_k \neq 0$ ，  
则系统函数有极点，此时，系统为 **IIR** 系统。

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

1. 如果所有的系数  $a_k = 0, (k = 1, \dots, N)$  , 则系统就是 **FIR系统**。  $H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$

2. **FIR系统**在有限  $z$  平面上, 只有零点, 没有极点, 称为全零系统, 或者称为滑动平均系统 (MA, Moving Average系统) 。

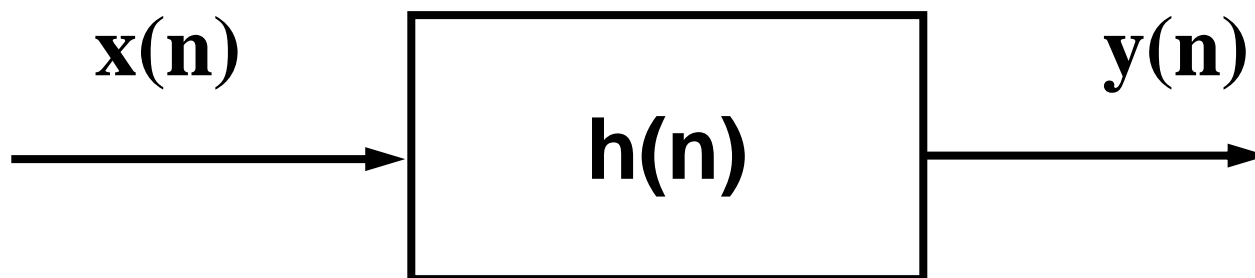
注: 有限 $z$ 平面为:  $0 < |z| < \infty$

## 5.2 数字滤波器的基本结构

设 $x(n)$ 是系统的输入， $X(e^{j\omega})$ 是其傅氏变换。

$y(n)$ 是系统的输出， $Y(e^{j\omega})$ 是其傅氏变换。

则：



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

## 数字滤波器的基本运算单元（3个）

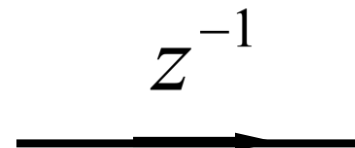
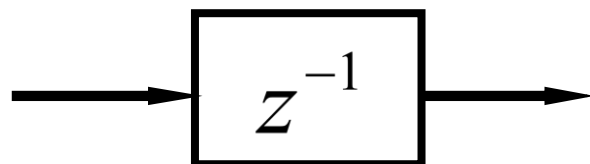
- 加法器
- 单位延时
- 常数乘法器

## 数字滤波器的表示方法（2种）

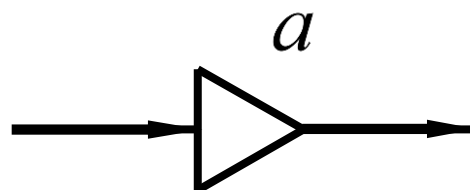
- 方框图法
- 信号流图法

# 基本运算单元的表示

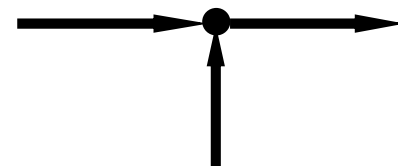
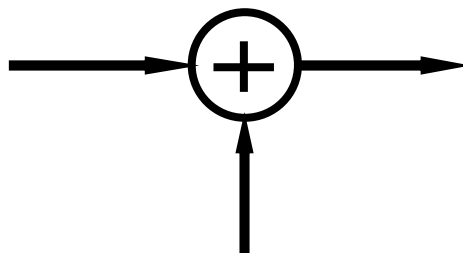
单位延时



乘常数



相加



方框图表示法

信号流图表示法

## 5.3 无限长单位冲激响应（IIR） 滤波器的基本结构

1. 直接I型（不要求）
2. 直接II型（不要求）
3. 级联型
4. 并联型

### 三、级联型

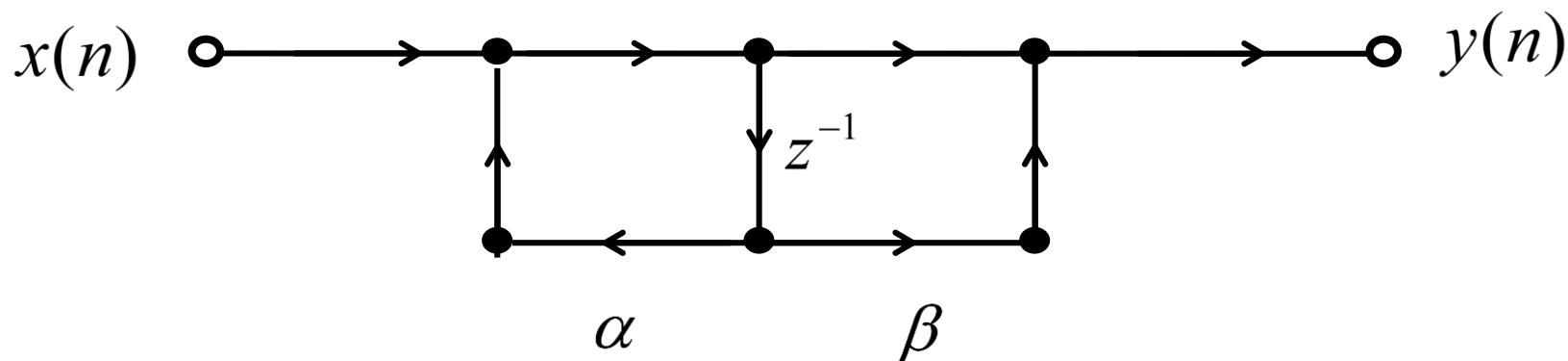
将系统函数按照零、极点进行因式分解

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

- $M = M_1 + 2M_2, N = N_1 + 2N_2$
- 一阶因式表示实根,  $p_k$  为实零点,  $c_k$  为实极点
- 二阶因式表示复共轭根,  $q_k, q_k^*$  表示共轭零点,  $d_k, d_k^*$  表示共轭极点

- 每一个一阶子系统称为一阶基本节

$$H_1(z) = \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$



$$H(z) = A \prod_k \frac{(1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{(1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})} = A \prod_k H_k(z)$$

## 级联结构的特点

1. 调整系数  $\beta_{1k}, \beta_{2k}$  就能单独调整滤波器的第 **k** 对零点；而不影响其它零、极点。
2. 调整系数  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  就能单独调整滤波器的第 **k** 对极点；而不影响其它零、极点。

## 级联结构的特点（不要求）

3. 便于准确实现滤波器的零极点，也即便于调整滤波器的频率响应性能。
4. 各个子系统的排列不同，所带来的误差也不同，存在一个最优化的问题。
5. 各个子系统的误差会积累。
6. 级联结构具有最少的存储器。

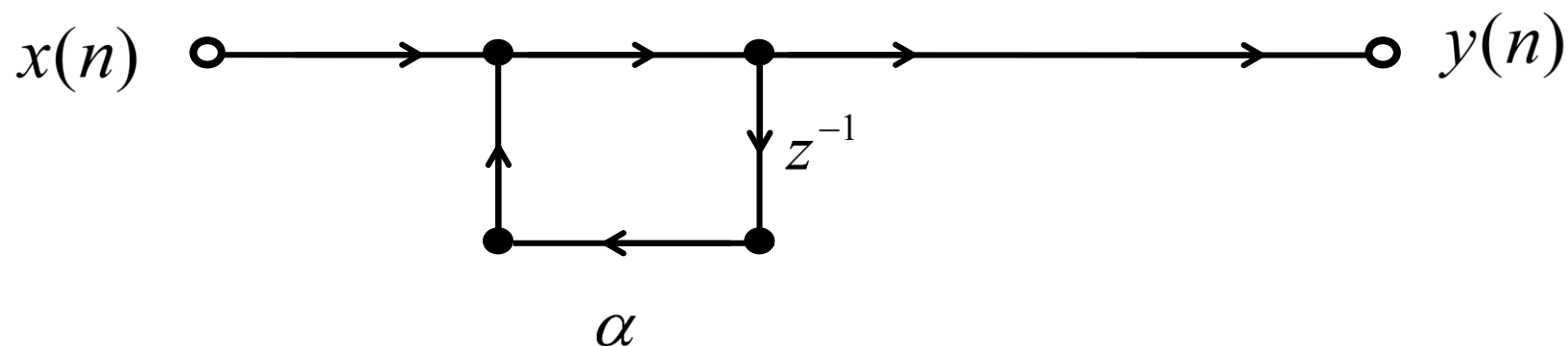
## 四、并联型

将系统函数进行部分分式展开，得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{B_k (1 - g_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k} \end{aligned}$$

- 并联结构的一阶基本节结构

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$



## 并联结构的特点

1. 调整系数  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  就能单独调整滤波器的第k对极点；而不影响其它零极点。
2. 不能单独调整系统的零点。
3. 各个子系统的误差相互没有影响，因此，误差比级联结构要小。（不要求）

## 5.4 有限长单位冲激响应（FIR） 滤波器的基本结构

1. 横截型（卷积型，直接型）（不要求）
2. 级联型（不要求）
3. 频率抽样型（不要求）
4. 快速卷积结构（不要求）
5. 线性相位结构

## 五、线性相位FIR滤波器的结构

- 如果**FIR**滤波器的单位冲激响应  $h(n)$  为实数，且满足：

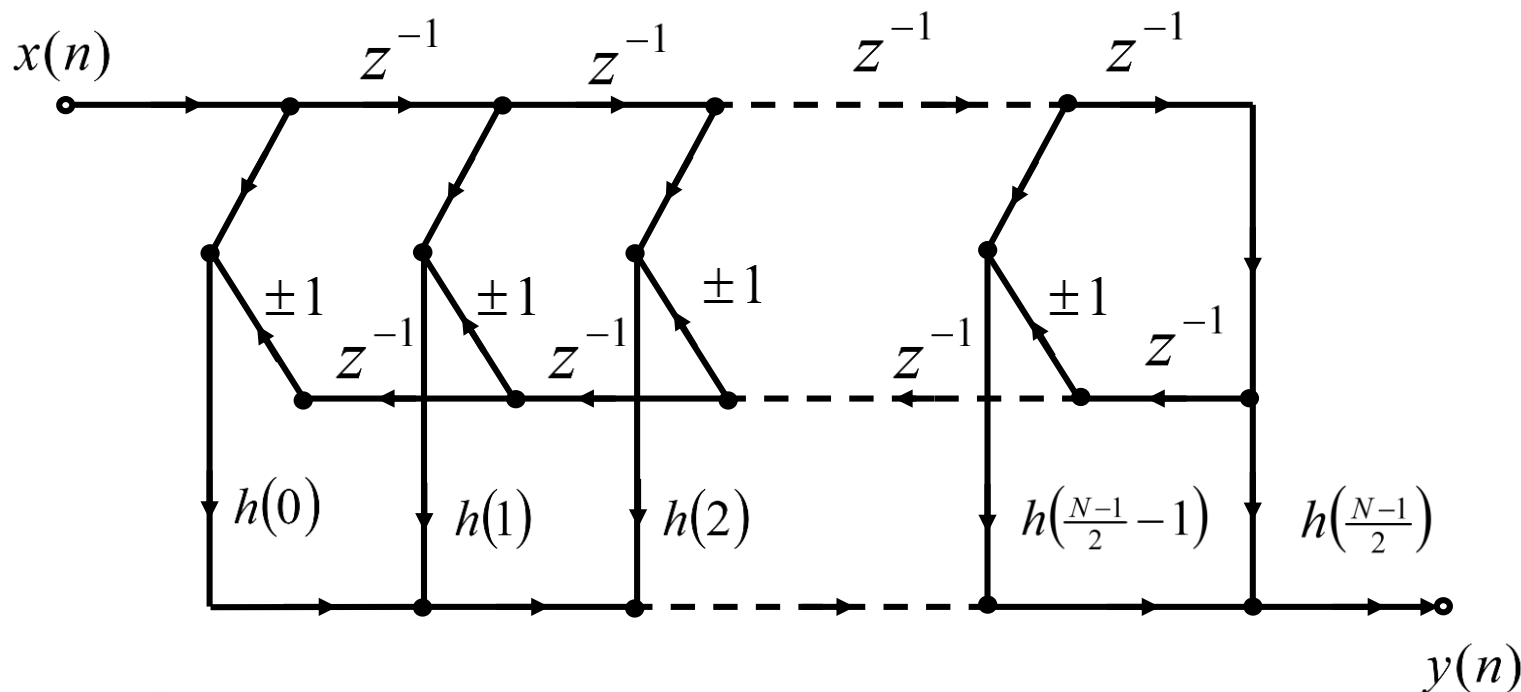
偶对称： 
$$h(n) = h(N-1-n)$$

奇对称： 
$$h(n) = -h(N-1-n)$$

- 则， **FIR**滤波器就具有严格的线性相位

# N为奇数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

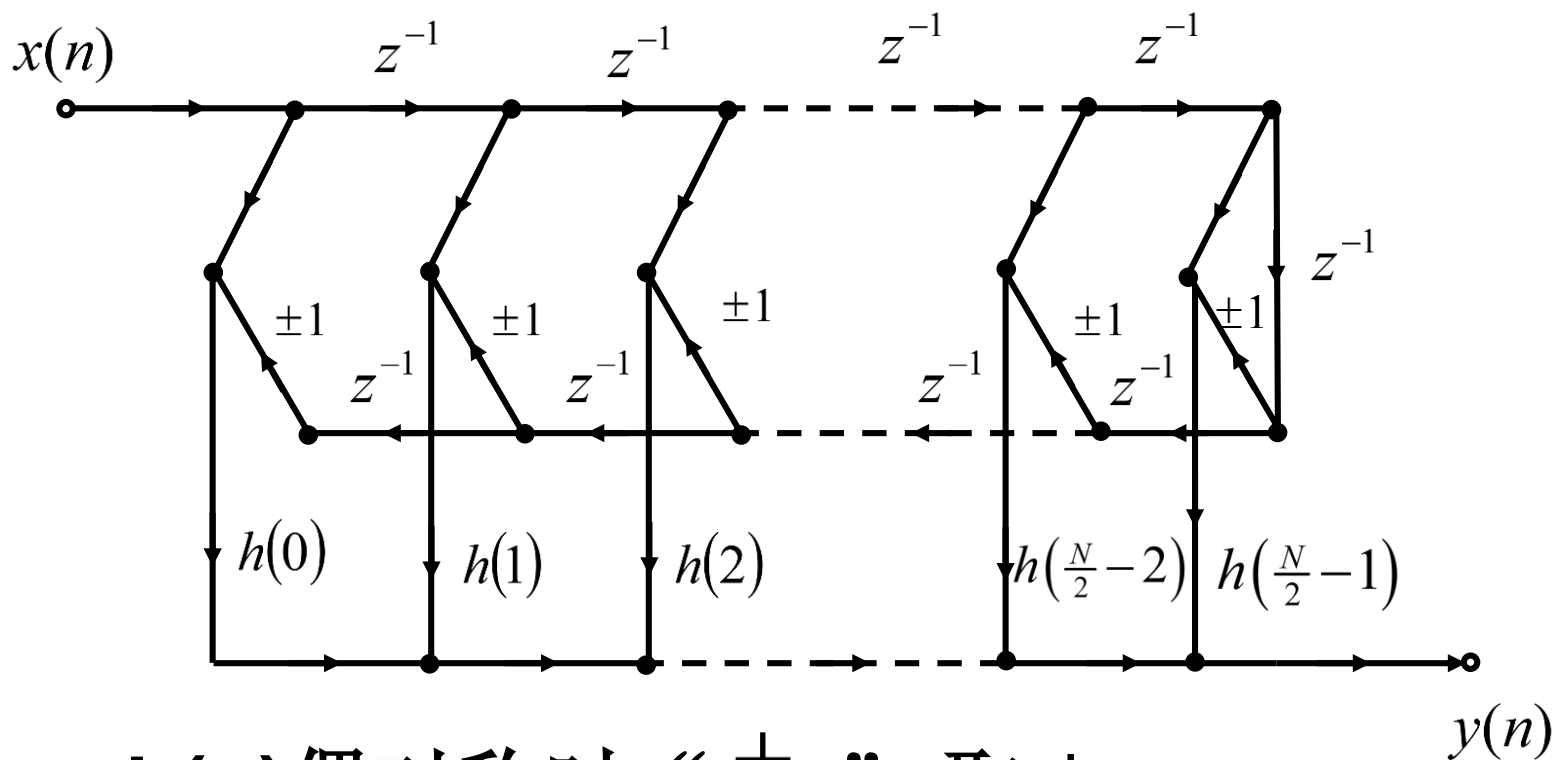


$h(n)$ 偶对称时 “ $\pm$ ” 取+

$h(n)$ 奇对称时 “ $\pm$ ” 取一，且  $h(\frac{N-1}{2}) = 0$

# N为偶数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$



$h(n)$ 偶对称时 “ $\pm$ ” 取+

$h(n)$ 奇对称时 “ $\pm$ ” 取-

# 6 IIR数字滤波器设计

- 6.1 数字滤波器基本概念
- 6.2 最小相位延时系统
- 6.3 全通系统
- 6.4 用模拟滤波器设计数字滤波器
- 6.5 冲激响应不变法
- 6.6 双线性变换法
- 6.7 设计IIR滤波器的频率变换法
- 6.8 先模拟域频带变换，再数字化法设计数字各型滤波器
- 6.9 先将模拟归一化低通原型化为数字低通，再  
利用数字域频带变换法设计数字各型滤波器
- 6.10 数字滤波器的实现

# 6.1 数字滤波器基本概念

- 数字滤波器类型（和模拟滤波器一样）
  - 低通（**Low pass, LP**）滤波器
  - 高通（**High pass, HP**）滤波器
  - 带通（**Band pass, BP**）滤波器
  - 带阻（**Band stop, BS**）滤波器
  - 全通（**All pass, AP**）滤波器
- 数字滤波器，其频率变量采用数字频率  $\omega$

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s$$

数字频率      模拟（角）频率      抽样时间间隔      抽样频率

$$\Omega = 2\pi f$$

- 数字系统的频率响应范围为  $(0, 2\pi)$  ;
- 数字频率对应的实际模拟频率是多少?
- 在数字滤波器设计中, 必须给出采样频率。

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi f_s T = 2\pi \frac{f_s}{f_s} = 2\pi$$

式中,  $\omega_s \rightarrow$  数字域抽样频率 (即  $2\pi$ )

$\frac{\omega_s}{2} \rightarrow$  折叠频率

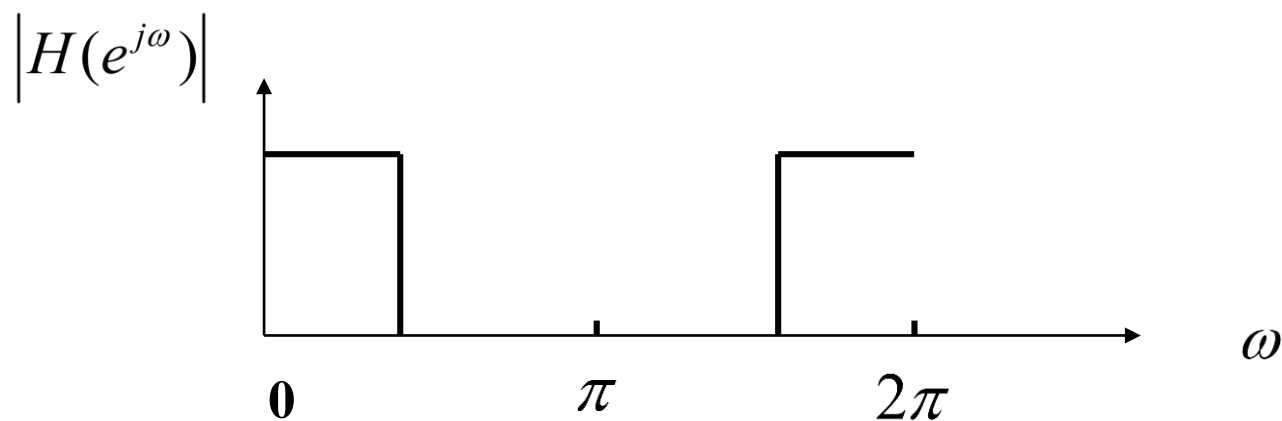
按照抽样定理, 实际频率只能在以下范围

$$\omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \pi \qquad f \leq \frac{f_s}{2}$$

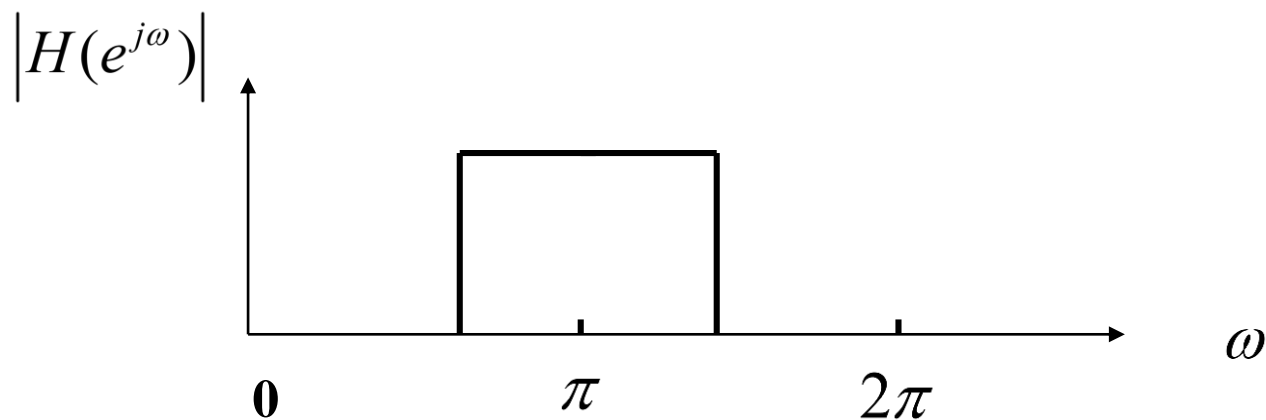
# 数字滤波器系统函数 $H(z)$

## 数字滤波器幅度频率响应 $|H(e^{j\omega})|$

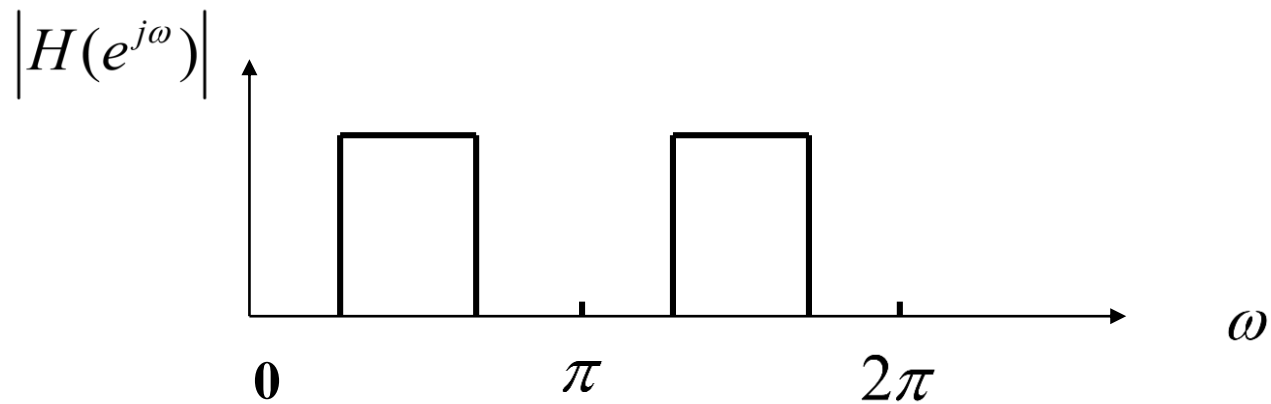
(a) 低通



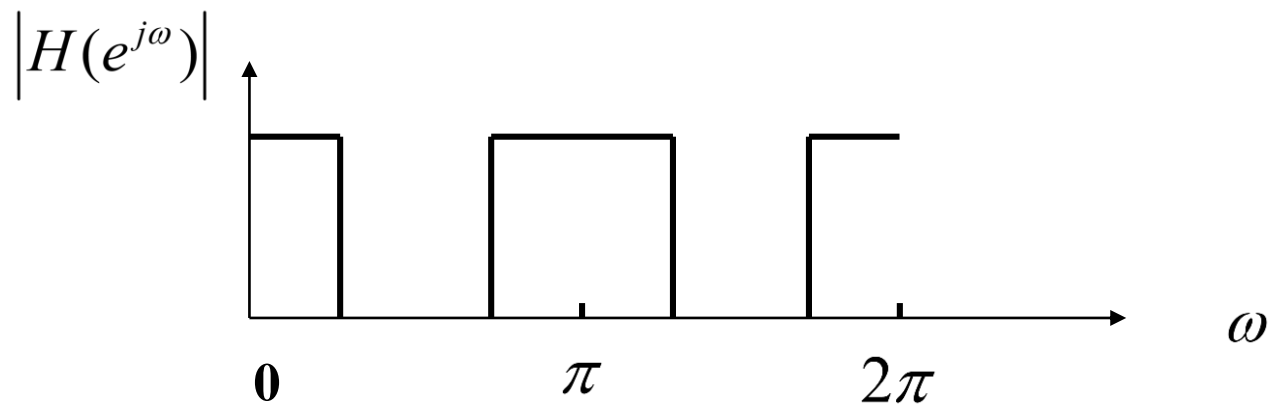
(b) 高通



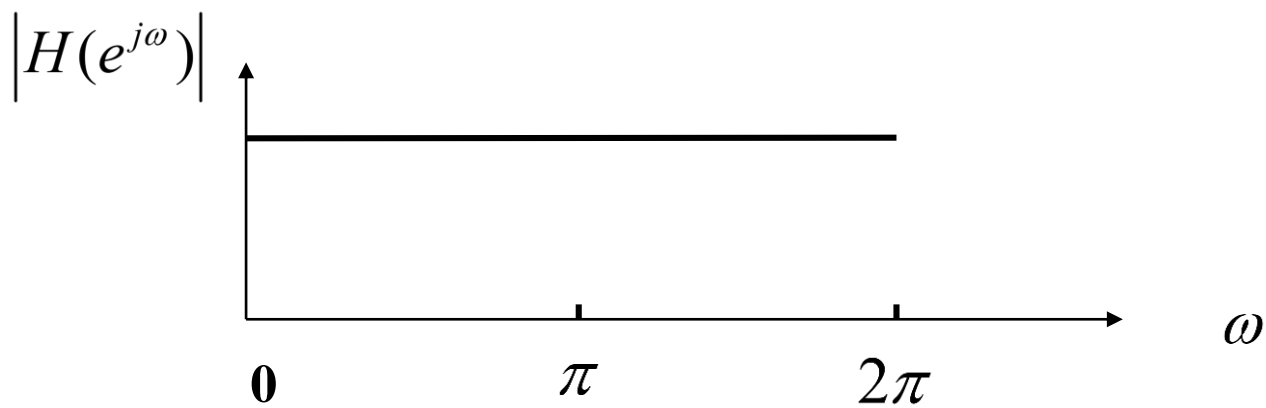
**(c) 带通**



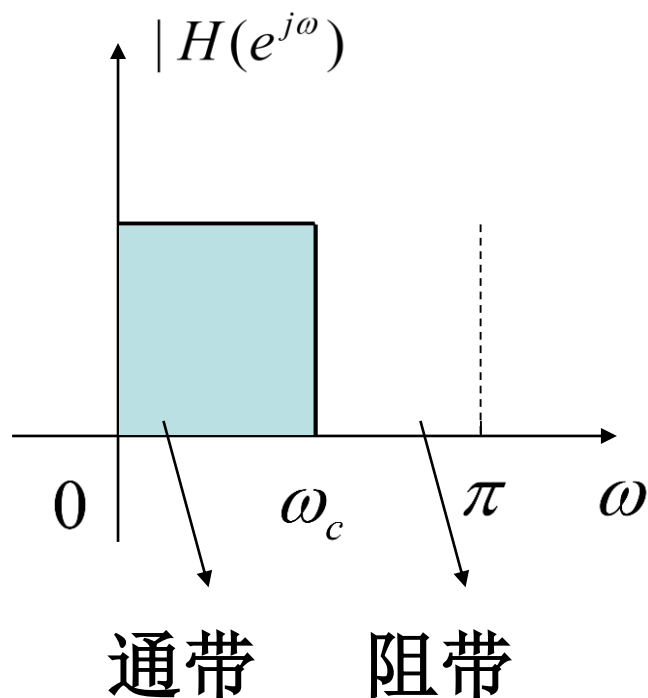
**(d) 带阻**



**(e) 全通**



- 理想低通滤波器的三个范围：
  - 通带
  - 阻带
  - 具有陡截止的通带、阻带

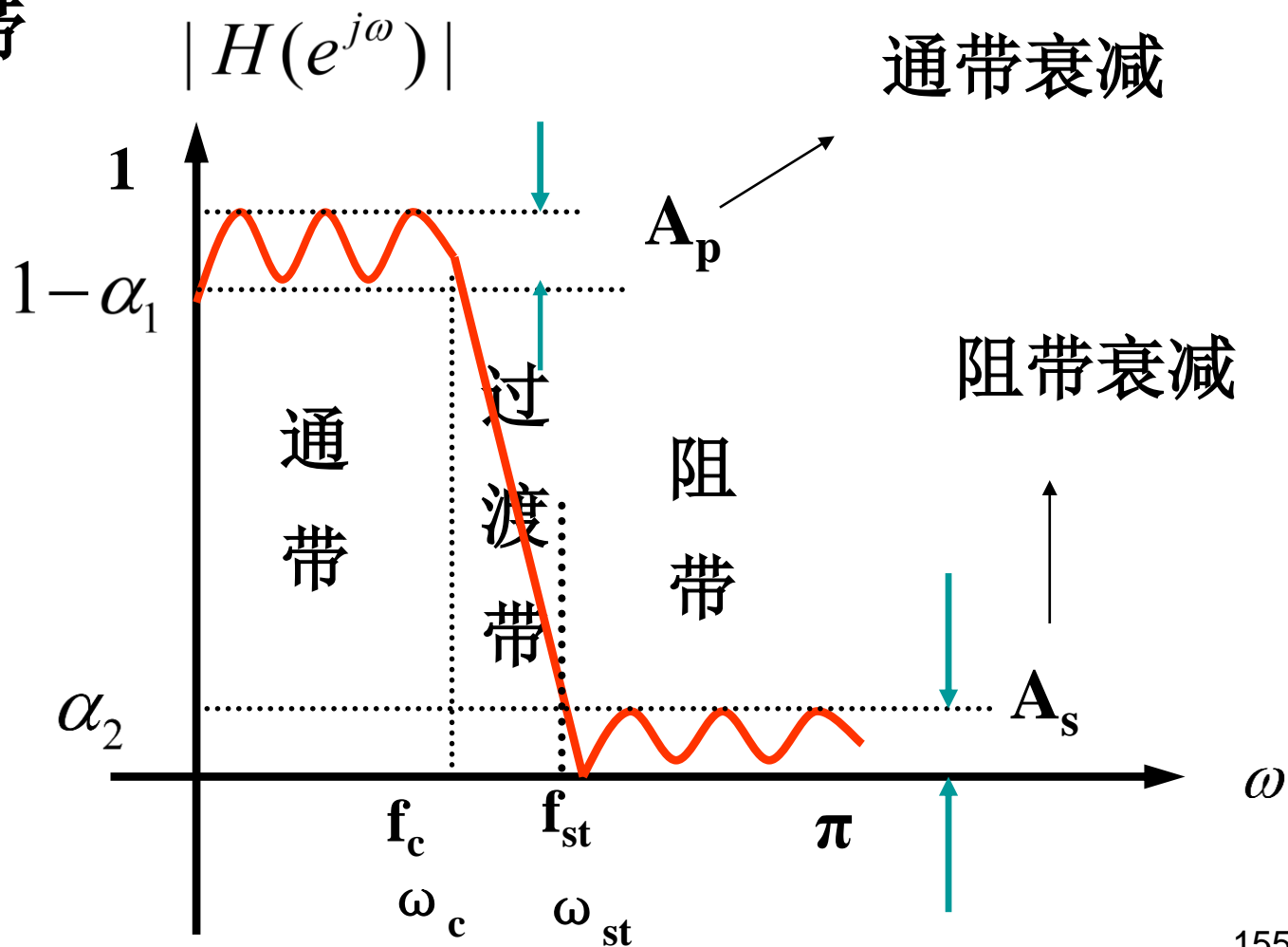


# 实际低通滤波器的三个范围：

→ 通带

→ 过渡带

→ 阻带



## 6.2 最小相位延时系统

一个线性移不变系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = K z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = K e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$

## 四种系统的归纳（超前系统不要求）

系 统	因果性	稳定性	零 点	极 点
最小相位 延时系统	因果	稳定	单位圆内	单位圆内
最大相位 延时系统	因果	稳定	单位圆外	单位圆内
混合系统	因果	稳定	单位圆内外	单位圆内
最小相位 超前系统	逆因果	稳定	单位圆外	单位圆外
最大相位 超前系统	逆因果	稳定	单位圆内	单位圆外

## 6.3 全通系统

- 定义：全通系统是指系统频率响应的幅度在所有频率  $\omega$  下均为 1 或者某一常数的系统。

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

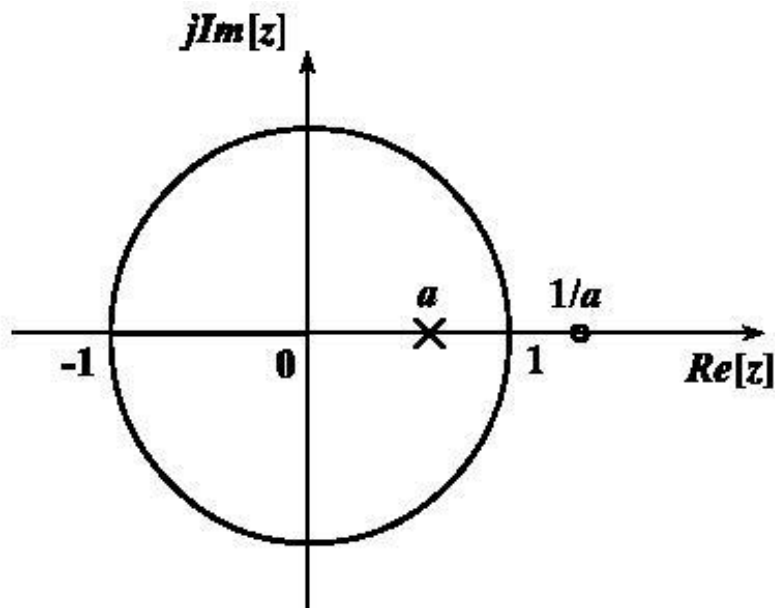
例如，一阶全通系统的系统函数为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 实数}, 0 < |a| < 1$$

# 一阶全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 实数}, 0 < |a| < 1$$

系统的零极点位置如图所示 ( $a > 0$ )。



零点:  $z = \frac{1}{a}$

极点:  $z = a$

问题：为什么要求：  
 $|a| < 1$  ？

- 复数零点、极点的一阶全通系统的系统函数为

$$\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{复数}, 0 < |a| < 1$$

- 极点为:  $z = a$
- 零点为:  $z = \frac{1}{a^*}$
- 零点、极点出现在共轭镜像位置（以单位圆为“镜子”），称为以单位圆为镜像对称。

# 实系数二阶全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a}{1 - a^*z^{-1}} \quad |a| < 1$$

极点:  $z = a, a^*$

零点:  $z = 1/a^*, 1/a$

两个零点（极点）共轭对称

零点与极点以单位圆为镜像对称

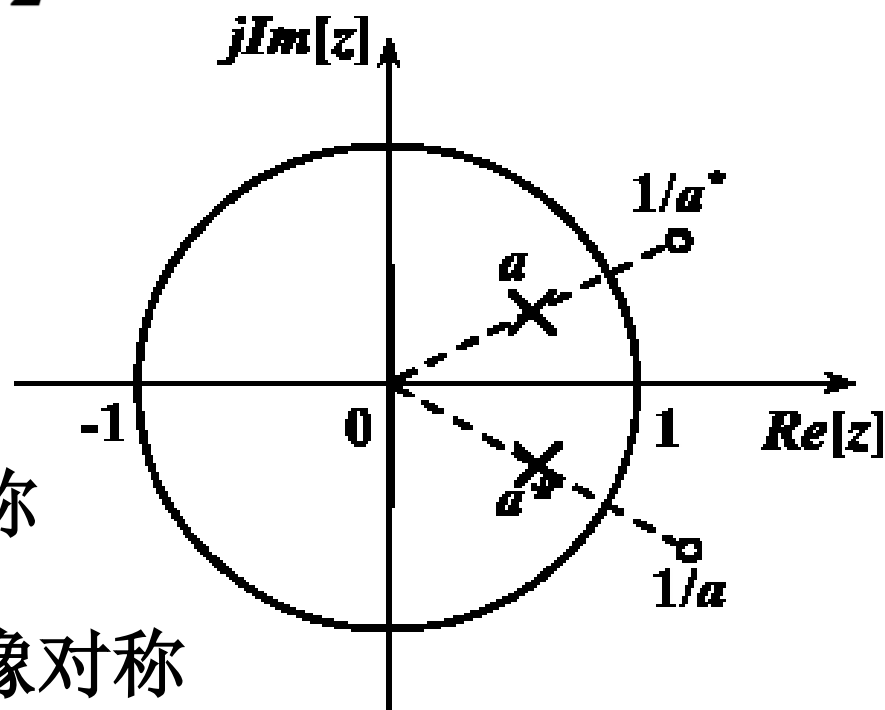


图6-5 二阶全通系统的零点-极点位置

# 全通系统的应用（了解即可）

- ① 任何一个因果稳定的（非最小相位延时）系统  $H(z)$  都可以表示为全通系统  $H_{ap}(z)$  和最小相位系统  $H_{\min}(z)$  的级联。

$$H(z) = H_{\min}(z) \bullet H_{ap}(z)$$

- ② 如果设计出滤波器是非稳定的，则可用级联全通系统的方法将它变成一个稳定的滤波器。
- ③ 作为相位均衡器用（将非线性相位滤波器转换为线性相位滤波器）。

## 6.4 用模拟滤波器滤波器 设计IIR数字滤波器

不要求

## 6.5 冲激响应不变法

- 一. 变换原理
- 二. 混叠失真
- 三. 数字化方法
- 四. 优缺点

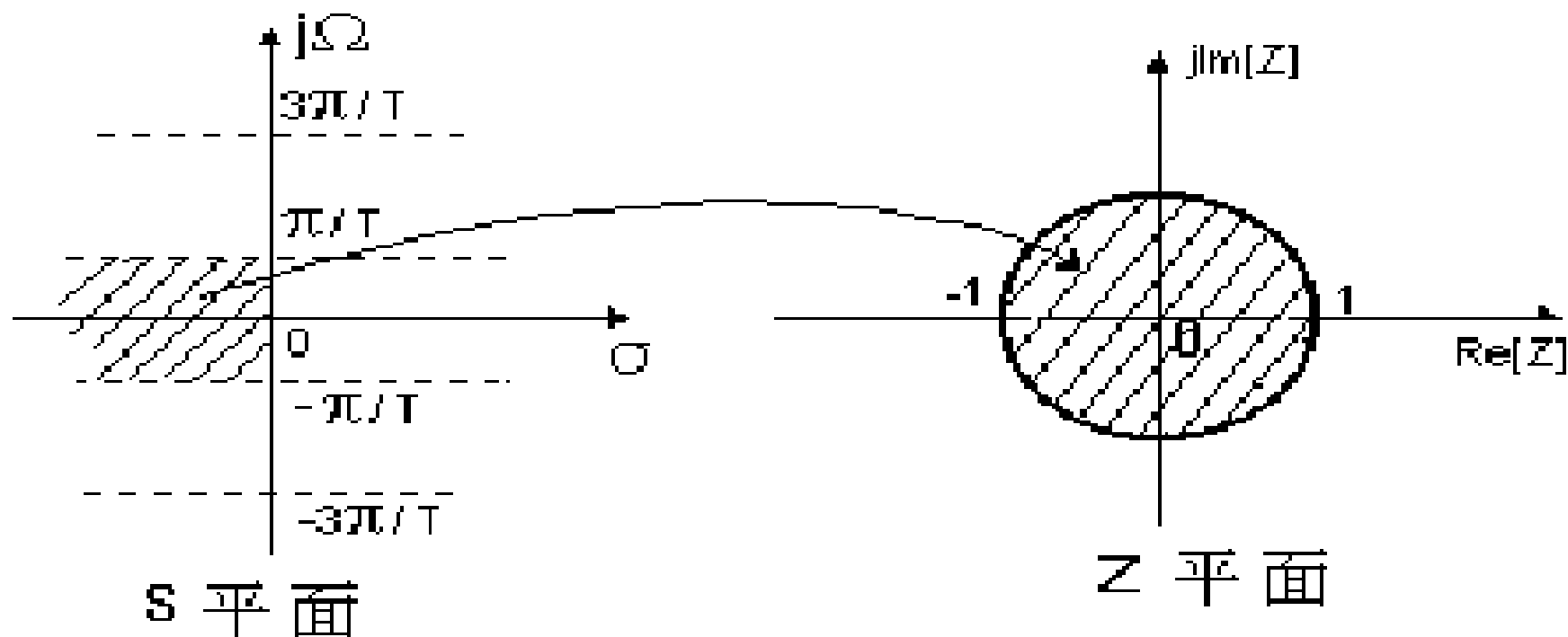
# 一、变换原理

- 冲激响应不变法就是使数字滤波器的单位冲激（脉冲）响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 。
- 将模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 以等间隔 $T$ 进行抽样，得到数字滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ 。

$$h(n) = h_a(nT)$$

- 时域逼近性能良好

- 冲激响应不变法将模拟滤波器的  $s$  平面映射到数字滤波器的  $z$  平面，其变换为： $z = e^{sT}$



冲激响应不变法映射关系

## 二、混叠失真

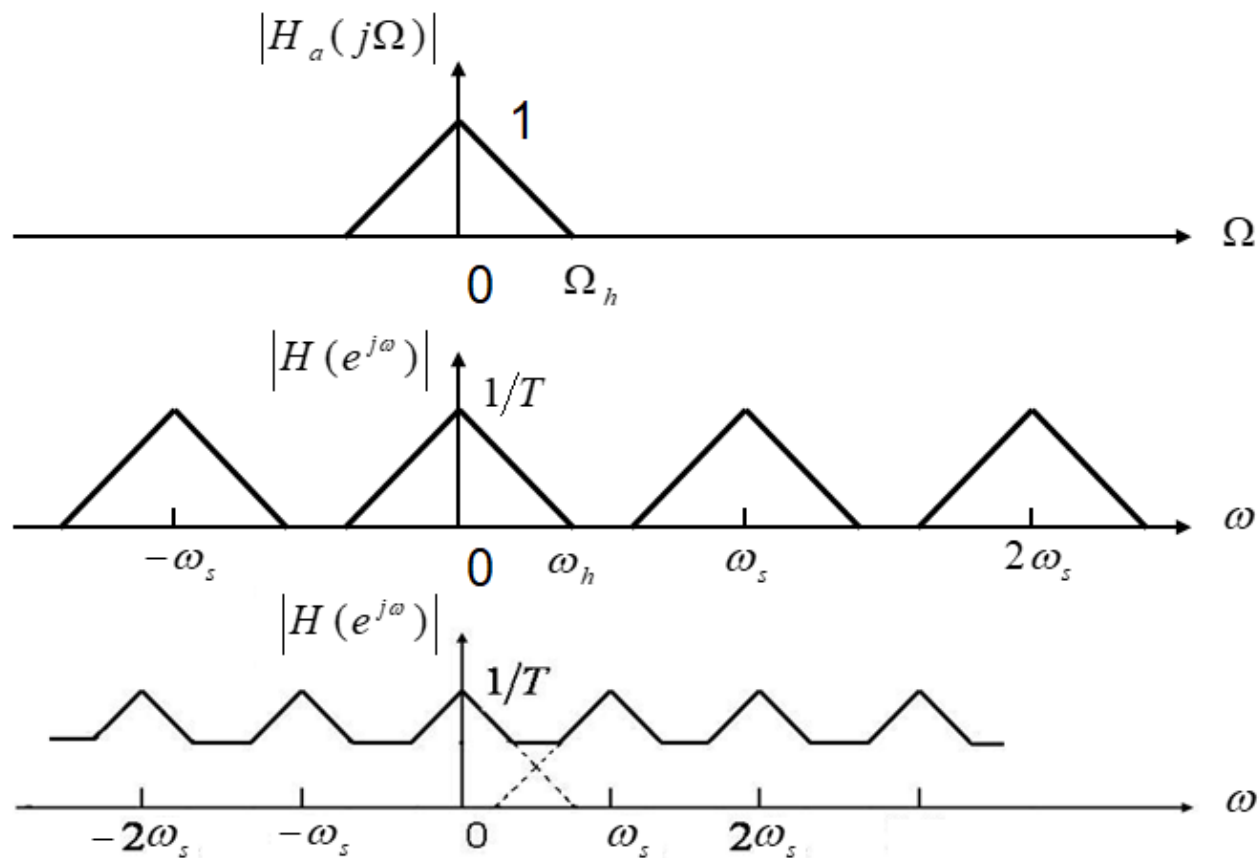
- 数字滤波器的频率响应是模拟滤波器的频率响应的周期延拓之和（抽样定理）

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

- 当模拟滤波器的频率响应是带限的，即在折叠频率之内，则数字滤波器的频率响应在折叠频率之内，重现模拟滤波器的频率响应，而不产生频率混叠失真。

即要求,  $h_a(j\Omega)=0$  当  $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$

有,  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), \quad |\omega| < \pi$



- 当模拟滤波器的频带是有限的，则采用冲激响应不变法不会产生频率混叠失真现象。
- 故冲激响应不变法适合设计数字低通滤波器、带通滤波器，不适合设计数字高通滤波器、带阻滤波器。

### 三、模拟滤波器的数字化方法

- 由模拟滤波器的系统函数  $H_a(s)$  求数字滤波器的系统函数  $H(z)$  的一般步骤

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT) \rightarrow H(z)$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- ①  $s$  平面的单极点  $s = s_k$  变换到  $z$  平面的单极点  
 $z = e^{s_k T}$  由映射  $z = e^{sT}$  直接得到
- ②  $H_a(s)$  和  $H(z)$  的部分分式的系数是相同的，  
都是  $A_k$

## 四、优缺点

- 优点

- 数字滤波器的冲激响应完全模仿模拟滤波器的冲激响应，时域逼近性能良好。

- 数字频率和模拟频率呈线性关系  $\omega = \Omega T$

- 缺点

- 有频率混叠现象

- 适用范围

- 带限的模拟滤波器（低通、带通）

- 不适合高通、带阻滤波器

## 6.6 双线性变换法

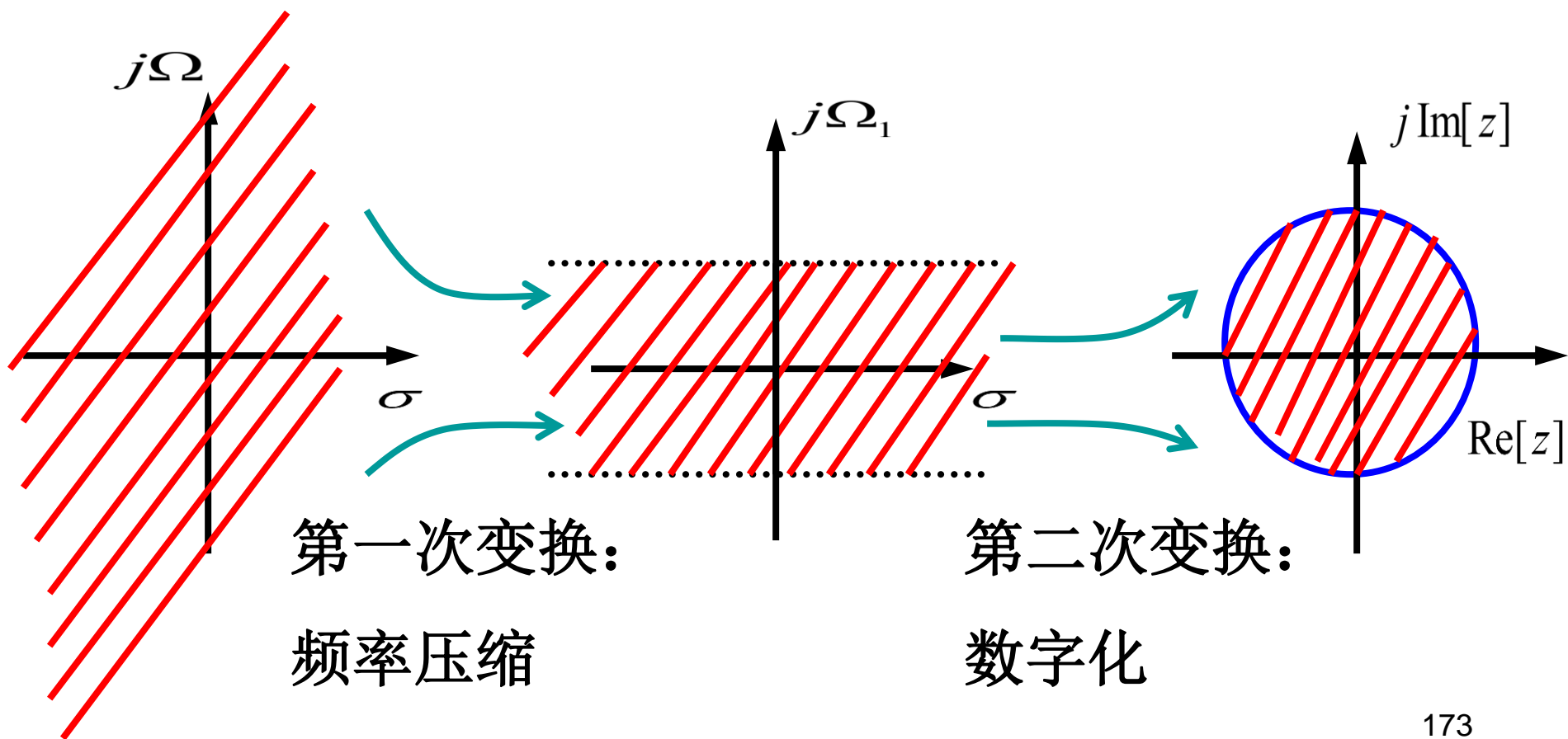
### 一、变换原理

- 先将整个  $s$  平面压缩变换到某一个中介的  $s_1$  平面的一条横带  $(-\pi/T, \pi/T)$
- 也就是将角频率从  $(-\infty, \infty)$  压缩到  $(-\pi/T, \pi/T)$
- 再将该横带用标准变换公式  $z = e^{s_1 T}$  映射到整个  $z$  平面。
- 从  $s$  平面到  $z$  平面是严格的一一对应关系，故能消除频率响应的混叠失真现象。

**S**  
平面

**S<sub>1</sub>**  
平面

**Z**  
平面



- 为了使模拟滤波器的某一个频率与数字滤波器的任一频率有对应关系，引入常数 **c**，则，数字频率和模拟频率中间的关系为：

$$\Omega = c \bullet \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = c \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- **s** 平面与 **z** 平面之间具有单值映射关系的双线性变换。

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad or \quad z = \frac{c + s}{c - s}$$

## 二、变换常数 $c$ 的选择

- 通过常数  $c$  可以调节数字频率和模拟频率之间的对应关系。

- 低频特性近似 
$$c = \frac{2}{T}$$

- 特定频率（截止频率）对应

$$c = \Omega_c \cot\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

- 一般采用低频特性近似方式

## 四、优缺点

### (1) 优点

- ① 避免了频率响应的混叠失真现象。
- ② 适用设计：低通、高通、带通、带阻滤波器

### (2) 缺点

- ① 模拟（角）频率  $\Omega$  与数字频率  $\omega$  之间不再是线性关系。
$$\Omega = c \bullet \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
- ② 非线性变换就不能保持原来的线性相位了。
- ③ 不适合设计线性相位数字滤波器。

## 五、模拟滤波器数字化方法

$$S = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Big|_{\text{在低频处}} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

代入 $H_a(s)$ 中，得到DF 的 $H(z)$

## 6.7 模拟原型低通滤波器设计

不要求

## 6.8 设计IIR滤波器的频率变换法

不要求

## 6.9 先利用模拟域频带变换法，再利用数字化设计数字各型滤波器

不要求

## 6.10 先数字化再进行数字频带变换

不要求

# 6.12 数字滤波器的实现

不要求

# 7 FIR 数字滤波器的设计方法

## 7.1 引言

## 7.2 线性相位FIR滤波器的特点

## 7.3 窗函数设计法

## 7.4 频率抽样设计法

## 7.5 IIR与FIR数字滤波器的比较

# 7.1 引言

## 无限长单位冲激响应（IIR）数字滤波器

### 1. 优点

- 可以利用模拟滤波器设计的结果
- 模拟滤波器设计有图表可查，简单方便

### 2. 缺点

- 相位非线性

## **FIR 数字滤波器优点**

- ① 严格的线性相位
- ② 任意的幅度特性
- ③ 因果稳定
- ④ 可以用FFT算法实现

## **FIR 数字滤波器（主要）缺点**

→ 相同的幅度特性要求，**FIR**滤波器的阶次比**IIR**滤波器的阶次要高（很多）。

## 7.2 线性相位FIR滤波器的特点

- **FIR**滤波器单位冲激响应 **$h(n)$** 有限长  $0 \leq n \leq N-1$
- 其  **$z$**  变换为 
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

# 一、线性相位条件（证明不要求）

## 1、第一类线性相位FIR滤波器

充要条件  $h(n) = h(N-1-n)$

相位  $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$       群延时  $\tau = \frac{N-1}{2}$

## 2、第二类线性相位FIR滤波器

充要条件  $h(n) = -h(N-1-n)$

相位  $\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$       群延时  $\tau = \frac{N-1}{2}$

### 三、线性相位滤波器幅度函数的特点

推导：不要求

# 四种线性相位FIR滤波器的性质

类 型	情况1	情况2	情况3	情况4
N (阶数为N-1)	奇数	偶数	奇数	偶数
$h(n)$ 的对称性	偶对称	偶对称	奇对称	奇对称
$H(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 的对称性	偶对称	偶对称	奇对称	奇对称
$H(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 的对称性	偶对称	奇对称	奇对称	偶对称
$H(\omega)$ 的周期	$2\pi$	$4\pi$	$2\pi$	$4\pi$
$\beta$	0	0	$0.5\pi$	$0.5\pi$
$H(0)$	任意	任意	0	0
$H(\pi)$	任意	0	0	任意
可适用的滤波器类型	LP, BP HP, BS	LP, BP	微分器, 希尔伯特变换器. BP	微分器, 希尔伯特, HP, BP

## 四、零点位置

若  $z = z_i$  是FIR滤波器系统函数  $H(z)$  的根

则：  $z = z_i^{-1}$ ,  $z = z_i^*$ ,  $z = (z_i^*)^{-1}$

也是  $H(z)$  的根。

## 7.3 窗函数设计法

- 一、设计方法
- 二、各种窗函数
- 三、设计步骤
- 四、存在问题
- 五、设计举例

# 一、设计方法

窗函数设计法又称傅里叶级数法。

## 1、设计思路

a) 先给定所要求设计的理想滤波器的频率响应

$$H_d(e^{j\omega})$$

b) 设计一个可实现的**FIR**滤波器频率响应  $H(e^{j\omega})$

c) 设计是在时域中进行，使所设计滤波器的 $h(n)$ 去逼近理想单位取样响应 $h_d(n)$ 。

## 2、设计要求

- 给出所要求的理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$   
要求设计一个**FIR**滤波器  $H(e^{j\omega})$
- 滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

- 目标:  $H(e^{j\omega})$  逼近于  $H_d(e^{j\omega})$ 。

### 3、设计方法

窗函数设计方法是在时域进行的。

对  $H_d(e^{j\omega})$  求傅里叶变换，求出单位冲激响应

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 理想频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  是矩形频率特性，故  $h_d(n)$  一定是无限长的序列，且是非因果的。
- 要设计的FIR滤波器，其  $h(n)$  是有限长的。
- 有限长的  $h(n)$  来逼近无限长的  $h_d(n)$  的最简单有效的方法是采用一个有限长的窗口函数  $w(n)$  来截取  $h_d(n)$  。

$$h(n) = w(n)h_d(n)$$

式中， $w(n)$  为窗函数。

## 4、设计分析

具有线性相位的理想**FIR**低通滤波器的频率响应

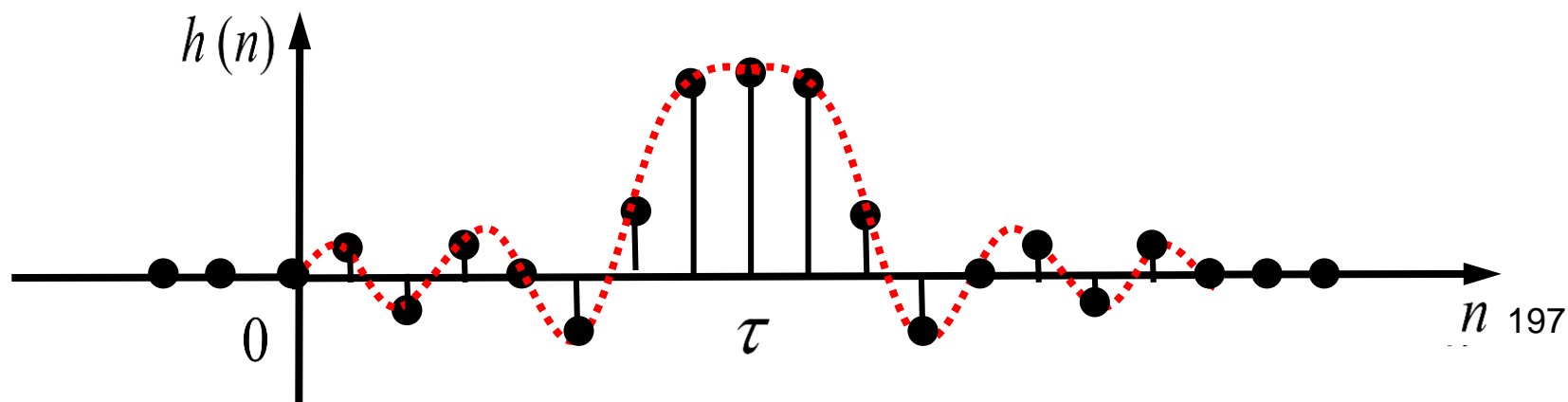
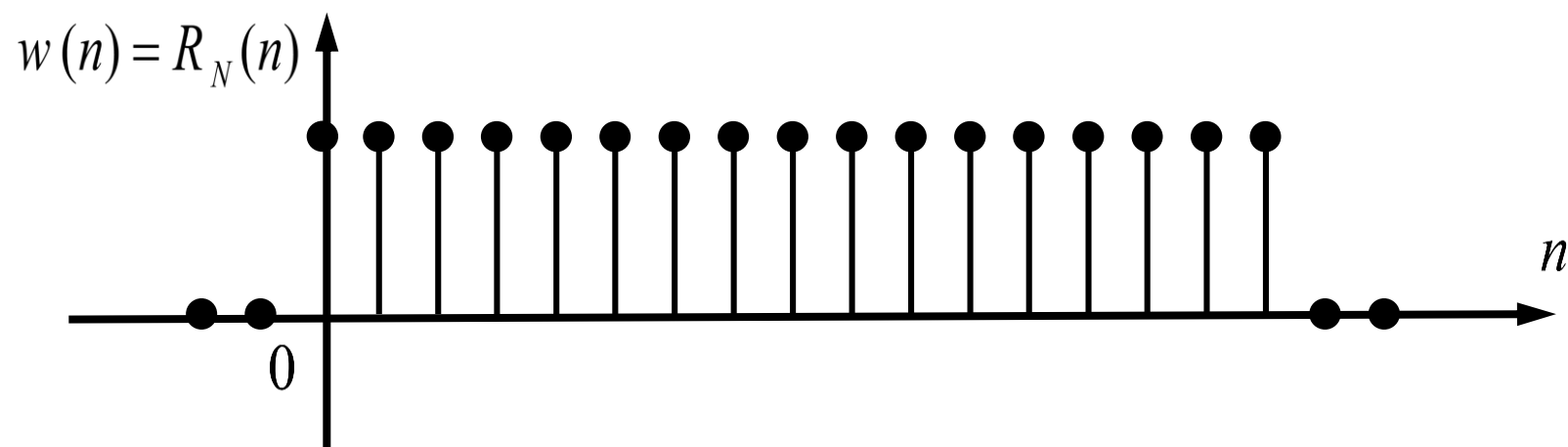
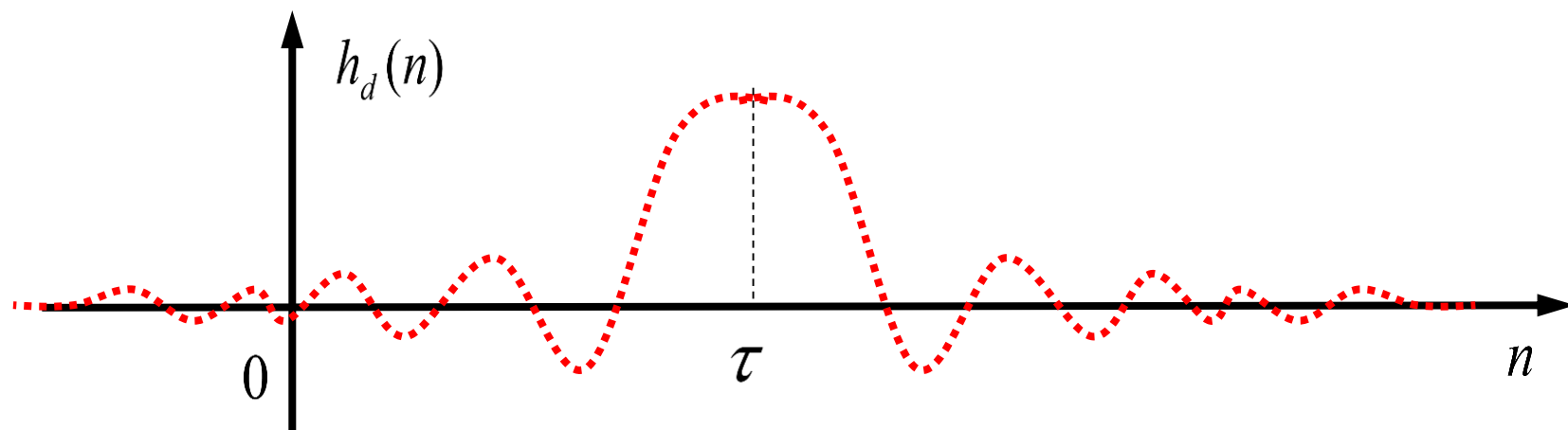
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi, -\pi \leq \omega < -\omega_c \end{cases}$$

单位抽样响应

$$h_d(n) = \begin{cases} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\omega_c(n-\tau)}, & n \neq \tau \\ = \frac{\omega_c}{\pi}, & n = \tau \end{cases}$$

**FIR**滤波器

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$



## 5 加窗处理的影响

### (1) 过渡带宽度

加窗后形成过渡带，过渡带宽是两个尖峰之间的宽度，也就是窗函数主瓣宽度。

矩形窗的主瓣宽度为： $\Delta\omega = 4\pi / N$

窗函数越长，过渡带宽越窄。

## (2) 尖峰值

- 在截止频率  $\omega_c$  的两边  $\omega = \omega_c \pm \frac{2\pi}{N}$  ,  
 $H(\omega)$  出现最大的肩峰值（正和负）,  
肩峰的两侧现成起伏波动, 其波动幅度、  
波动多少与窗函数有关, 与长度无关。
- 例如, 矩形窗, 最大相对肩峰值为 8.95% ,  
N增加,  $2\pi / N$ 减少, 故起伏振荡变密, 但最大相对肩峰值仍然为 8.95% 。

这种现象称为吉布斯（Gibbs）现象。

### (3) 窗函数长度N

- 改变N，只能改变窗谱的主瓣宽度、改变  $\omega$  坐标的比例以及改变  $W_R(\omega)$  的绝对值大小，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例，该值由  $\frac{\sin x}{x}$  决定，或者说由窗函数的形状来确定。
- 增加N，只会减少过渡带宽  $4\pi / N$ ，而不会减少肩峰的相对值，也即不能改变阻带最小衰减。

- 窗函数的两个要求：

(1) 窗谱主瓣尽可能地窄，以便获得较陡的过渡带。

(2) 尽量减少窗谱的最大旁瓣的相对幅度，使能量尽可能集中于主瓣，使肩峰和波纹减少，即增大阻带衰减。

这两者是相互矛盾的，不能同时满足。

一般采用增大主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

即增大过渡带宽 → 增大阻带衰减。

## 二、窗函数

下面我们讨论六种窗函数，并比较它们的特性。

- (1) 矩形窗 (*Rectangle Window*)
- (2) 三角形窗 (*Bartlett Window*)
- (3) 升余弦窗 (汉宁窗 *Hanning*)
- (4) 改进余弦窗 (汉明窗 *Hamming*)
- (5) 二阶升余弦窗 (布拉克曼 (*Blackman*) 窗)
- (6) 凯塞窗 (*Kaiser*)

窗函数 $W(n)$ 不仅影响原来信号在时域的形状，也影响了信号在频域的形状。

# 六种窗函数的基本参数 (P359)

窗函数	旁瓣峰值幅度 (dB)	过渡带宽 $\Delta\omega/(\frac{2\pi}{N})$	阻带最小衰减 (dB)
矩形窗	-13	0.9	21
三角形窗	-25	2.1	25
汉宁窗	-31	3.1	44
海明窗	-41	3.3	53
布拉克曼窗	-57	5.5	74
凯泽窗	-57	5	80
$(\beta = 7.865)$			

### 三、窗函数法的设计步骤

(1) 首先给定所要求的频率响应函数  $H_d(e^{j\omega})$

(2) 利用傅里叶反变换求  $h_d(n) = IDFT[H_d(e^{j\omega})]$

(3) 由过渡带宽及阻带衰减的要求，利用表7-3，选定窗  $w(n)$  的形状和  $N$  的大小，一般  $N$  要通过几次试探确定。

(4) 求所设计的FIR滤波器的单位抽样响应

$$h(n) = h_d(n)w(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(5) 求  $H(e^{j\omega}) = DTFT[h(n)]$ ，检验是否满足设计要求，如不满足，则需重新设计。

## 四、线性相位FIR低通滤波器的设计

例题：设计一个线性相位FIR低通滤波器，给定抽样频率为  $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/sec)$ ，通带截止频率为  $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/sec)$ ，阻带开始频率为  $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/sec)$ ，阻带衰减不小于  $-50dB$ ，幅度特性如图所示。

要掌握（低通、高通滤波器设计）！

# 各种滤波器之间的关系

- 一个高通滤波器等于一个全通滤波器减去一个低通滤波器；
- 一个带通滤波器等于两个低通滤波器相减，其中一个截止频率为  $\omega_2$ ，另一个截止频率为  $\omega_1$ ；
- 一个带阻滤波器等于一个低通滤波器（截止频率为  $\omega_1$ ）加上一个高通滤波器（截止频率为  $\omega_2$ ）；

## 7.4 频率抽样设计法

- 频率抽样设计法是在频域进行设计的
- 如果其阻带最小衰减不满足要求，可以采取增加过渡点措施？

其他不要求

## 7.7 IIR与FIR数字滤波器的比较

- 滤波器阶数
- 线性相位
- 稳定性（不要求）
- 快速算法（不要求）
- 设计方法（不要求）
- 应用范围（不要求）