数字图像处理

第3章 图像处理中的正交变换

信息科学研究所

3.2 离散余弦变换

图像处理中常用的正交变换除了傅里叶变换外，还有其他一些有用的正交变换。其中离散余弦变换就是一种，简写为**DCT**。

3.2.1 离散余弦变换的定义

一维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x) \qquad (3—74)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad (3—75)$$

一维离散余弦反变换由下式表示

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{N}}F(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{N-1}F(u)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad \textbf{(3—76)}$$

显然，式(3—74)、(3—75)和式(3—76)构成了一维离散余弦变换对。

二维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

$$F(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$F(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad \textbf{(3—77)}$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

二维离散余弦反变换由下式表示

$$f(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{v=1}^{N-1}F(0,v)\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{u=1}^{N-1}F(u,0)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1}F(u,v)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

(3—78)

式(3—77)和式(3—78)是离散余弦变换的解析式定义。更为简洁的定义是采用矩阵式。如果令$N=4$，那么由一维解析式定义可得如下展开式

$$
\begin{cases}
F(0) = 0.500f(0) + 0.500f(1) + 0.500f(2) + 0.500f(3) \\
F(1) = 0.653f(0) + 0.271f(1) - 0.271f(2) - 0.653f(3) \\
F(2) = 0.500f(0) - 0.500f(1) - 0.500f(2) + 0.500f(3) \\
F(3) = 0.271f(0) - 0.653f(1) + 0.653f(2) - 0.271f(3)
\end{cases}
$$

(3—79)

写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

(3—80)

若定义$[A]$ 为变换矩阵，$[F(u)]$为变换系数矩阵，$[f(x)]$为时域数据矩阵，则一维离散余弦变换的矩阵定义式可写成如下形式

$$[F(u)] = [A][f(x)] \qquad \textbf{(3—81)}$$

同理，可得到反变换展开式

$$\begin{cases} f(0) = 0.500F(0) + 0.653F(1) + 0.500F(2) + 0.271F(3) \\ f(1) = 0.500F(0) + 0.271F(1) - 0.500F(2) - 0.653F(3) \\ f(2) = 0.500F(0) - 0.271F(1) - 0.500F(2) + 0.653F(3) \\ f(3) = 0.500F(0) - 0.653F(1) + 0.500F(2) - 0.271F(3) \end{cases}$$

(3—82)

写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.653 & 0.500 & 0.271 \\ 0.500 & 0.271 & -0.500 & -0.653 \\ 0.500 & -0.271 & -0.500 & 0.653 \\ 0.500 & -0.653 & 0.500 & -0.271 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix}$$

即 $$[f(x)] = [A]' \ [F(u)] \tag{3—84}$$

当然，二维离散余弦变换也可以写成矩阵式

$$\begin{aligned} [F(u,v)] &= [A][f(x,y)][A]' \\ [f(x,y)] &= [A]'[F(u,v)][A] \end{aligned} \tag{3—85}$$

式中$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$是空间数据阵列，$\boldsymbol{F}[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]$是变换系数阵列，**[A]**是变换矩阵，$[A]'$是$[\boldsymbol{A}]$的转置。

3.2.2 离散余弦变换的正交性

由一维**DCT**的定义可知

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

它的基向量是

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{N}},\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right\} \qquad (3—86)$$

在高等数学中，切比雪夫多项式的定义为

$$T_0(p)=\sqrt{\frac{1}{N}}$$

$$T_u(z_x)=\sqrt{\frac{2}{N}}cos\left[u\,arccos(z_x)\right] \quad \textbf{(3—87)}$$

式中 $T_u(z_x)$ 是 u 和 z_x 多项式。

它的第N个多项式为

$$T_N(z_x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left[N \arccos(z_x) \right]$$

如果 $T_N(z_x) = 0$

那么 $z_x = \cos\dfrac{(2x+1)\pi}{2N}$

将此式代入 $T_N(z_x)$

$$T_N = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left\{u\arccos\left[\cos\frac{(2x+1)\pi}{2N}\right]\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad (3—88)$$

比较一下余弦变换的基向量

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{N}},\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right\}$$

显然，这与一维DCT的基向量是一致的。因为切比雪夫多项式是正交的，所以DCT也是正交的。另外，离散余弦变换的正交性也可以通过实例看出。如前所示，当N＝ 4 时：

$$[A] = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

$$[A]' = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.635 & 0.500 & 0.2710 \\ 0.500 & 0.271 & -0.500 & -0.653 \\ 0.500 & -0.271 & -0.500 & 0.653 \\ 0.500 & -0.653 & 0.500 & -0.271 \end{bmatrix}$$

显然 $$[A][A]' = [I]$$

这是满足正交条件的。从上述讨论可见，离散余弦变换是一类正交变换。

3.2.3 离散余弦变换的计算

与傅里叶变换一样，离散余弦变换可以由定义出发进行计算，但计算量太大，在实际应用中很不方便。所以也要寻求一种快速算法。首先，从定义出发，作如下推导

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\
&= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) R_e \left\{ e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{N}} R_e \left\{ \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\}
\end{aligned}
$$

(3—89)

如果把时域数据向量作下列延拓，即：

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & x = 0,1,2,\cdots\cdots, N-1 \\ 0 & x = N, N+1,\cdots\cdots,2N-1 \end{cases} \tag{3—90}$$

则 $f_e(x)$ 的离散余弦变换可写成下式

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x)$$

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} R_e \left\{ \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x)\, e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \qquad (3—91)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} R_e \left\{ e^{-j\frac{u\pi}{2N}} \cdot \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x)\, e^{-j\frac{2xu\pi}{2N}} \right\}$$

由式(3—91)可见

$$\sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x)\, e^{-j\frac{2xu\pi}{2N}}$$

正是延拓后2N点的离散傅里叶变换。

所以，在作离散余弦变换时，可以把序列长度延拓为2N，然后作离散傅里叶变换，产生的结果取其实部便可得到余弦变换。

同样道理，在作反变换时，首先在变换空间，把[***F*(*u*)**]作如下下延拓

$$F_e(u)=\begin{cases}F(u) & u=0,1,2,\cdots\cdots,N-1\\ 0 & u=N,N+1,\cdots\cdots,2N-1\end{cases}\qquad (3—92)$$

那么，反变换也可用式**(3—93)**表示

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) R_e \left\{ e^{j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) R_e \left\{ e^{j\frac{2xu\pi}{2N}} \cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} R_e \left\{ \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) \cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}} \cdot e^{j\frac{2xu\pi}{2N}} \right\} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}} \right] F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} R_e \left\{ \sum_{u=0}^{2N-1} \left[F_e(u) \cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}} \right] e^{j\frac{2xu\pi}{2N}} \right\}
\end{aligned}
$$

(3—93)

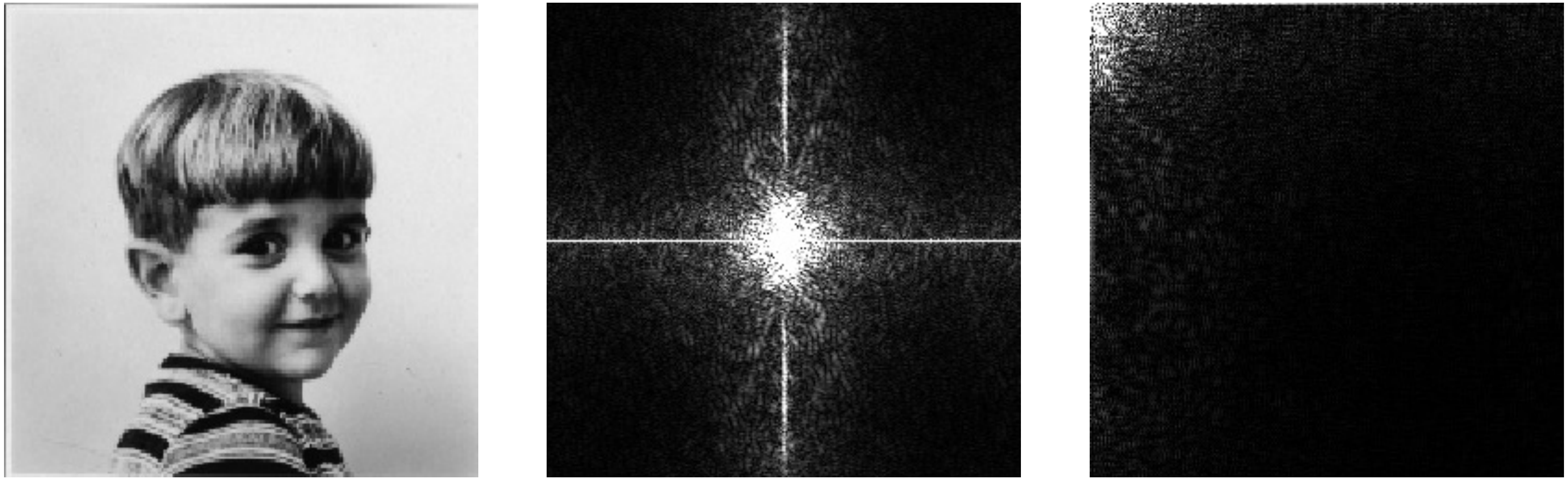
由式(3—93)可见，离散余弦反变换可以从

$$\left[F_e(u) \cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}} \right]$$

的2N点反傅里叶变换实现。

离散余弦变换的快速算法：

利用 *FFT* 解决离散余弦变换的快速运算问题。



3.3 沃尔什变换

离散傅里叶变换（基为指数函数）和余弦变换（基为余弦函数）的快速算法也都要用到复数乘法，占用时间仍然比较多。某些应用领域需要更为有效的变换方法。沃尔什变换（基为沃尔什函数）就是其中的一种。

沃尔什函数是1923年由美国数学家沃尔什(J.L.Walsh)提出的。在沃尔什的原始论文中，给出了沃尔什函数的递推公式，这个公式是按照函数的序数(正交区间内过零点平均数)来定义的。

不久以后，这种规定函数序数的方法也被波兰数学家卡兹马兹(S.Kaczmarz)采用，所以，通常将这种规定函数序数的方法称为沃尔什一卡兹马兹定序法。

1931年美国数学家佩利(R.E.A.C.Paley)又给沃尔什函数提出了一个新的定义。他指出，沃尔什函数可以用有限个拉德梅克(Rademacher)函数的乘积来表示。

这样得到的函数的序数与沃尔什得到的函数的序数完全不同。这种定序方法是用二进制来定序的，所以称为二进制序数或自然序数。

利用只包含＋1和－1的正交矩阵可以将沃尔什函数表示为矩阵形式。早在1867年，英国数学家希尔威斯特(J.J.Sylvester)已经研究过这种矩阵，后来法国数学家哈达玛(M.Hadamard)在1893年将这种矩阵加以普遍化，建立了哈达玛矩阵。

利用克罗内克乘积算子(**Kronecker Product Operator**)可以把沃尔什函数表示为哈达玛矩阵形式。利用这种形式定义的沃尔什函数称为克罗内克序数。这就是沃尔什函数的第三种定序法。

由上述历史可见，沃尔什函数的数学基础早已奠定，但在工程中得到应用却是近几十年的事情。主要原因还是由于半导体器件和计算机的发展，这为沃尔什函数的实用解决了手段问题，因此，也使沃尔什函数得到了进一步发展。

与傅里叶变换相比，沃尔什变换的主要优点在于存储空间少和运算速度高，这一点对图像处理来说至关重要，特别是在大量数据需要进行实时处理时，沃尔什函数就更加显示出它的优越性。

拉德梅克函数

拉德梅克(**Rademacher**)函数集是一个不完备的正交函数集，由它可以构成完备的沃尔什函数。这里首先介绍拉德梅克函数。拉德梅克函数包括n和t两个自变量，用$R(n,t)$来表示拉德梅克函数：

$$R(n,t) = \mathrm{sgn}(\sin 2^{n} \pi t) \tag{3—100}$$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{3—101}$$

当***x*=0**时， ***sgn*(*x*)** 无定义。

由sin函数的周期性可知$R(n,t)$也是周期性函数。

由式(3—100)可见:

当 n=1时，$R(1,t)$的周期为1；

当 n=2时，$R(2,t)$的周期为1/2；

当 n=3时，$R(3,t)$的周期为 $\frac{1}{2^2}$ ；

一般情况下可用下式表示

$$R(n,t) = R\left(n, t + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad n = 1,2,\cdots\cdots$$

(3—102)

拉德梅克函数的波形如图3—9所示。

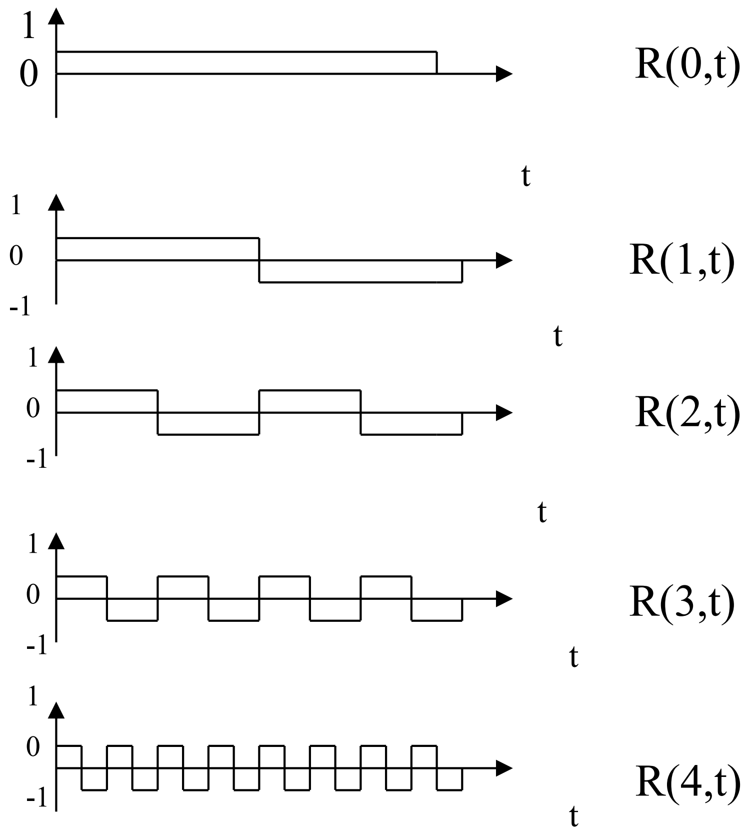


图 3—9 拉德梅克函数

由图3—9可见，拉德梅克函数有如下一些规律：

１）$R(n,t)$的取值只有+1和-1。

２）$R(n,t)$是$R(n-1,t)$的二倍频。因此，如果已知最高次数$m=n$，则其他拉德梅克函数可由脉冲分频器来产生。

3）如果已知***n***，那么***R*(*n*,*t*)**有 2^{n-1} 个周期，其中**0<*t*<1；**

4）如果在 $t=\frac{k+\frac{1}{2}}{2^N}$ 处取样，则可得到数据序列***R*(*n*,*k*)，**$\mathrm{k}=0,1,2,\cdots\cdots,2^{\mathrm{n}}-1$。每一取样序列与下述矩阵对应，这里取***n*=0,1,2,3**， ***k*=0,1,2,...7**。

$$\begin{bmatrix} R(0,k) \\ R(1,k) \\ R(2,k) \\ R(3,k) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3\text{—}103)$$

采用上述离散矩阵形式就可以用计算机进行灵活处理。

3.3.2 沃尔什函数

沃尔什函数系是完备的正交函数系，其值只取＋1和－1。按排列次序来定义有：

第一种是按沃尔什排列或称按列率排列来定义；

第二种是按佩利排列定义 （自然序数）；

第三种是按哈达玛排列来定义（第三定序法）。

还可用其它方式来定义，但沃尔什函数的定义至今尚未统一，下面分别讨论上述三种排列方法定义的沃尔什函数。

1. 按沃尔什排列的沃尔什函数

按沃尔什排列的沃尔什函数用 $wal_W(i,t)$ 来表示。

按沃尔什排列的沃尔什函数实际上就是按列率排列的沃尔什函数。函数波形如图**3—10**所示。

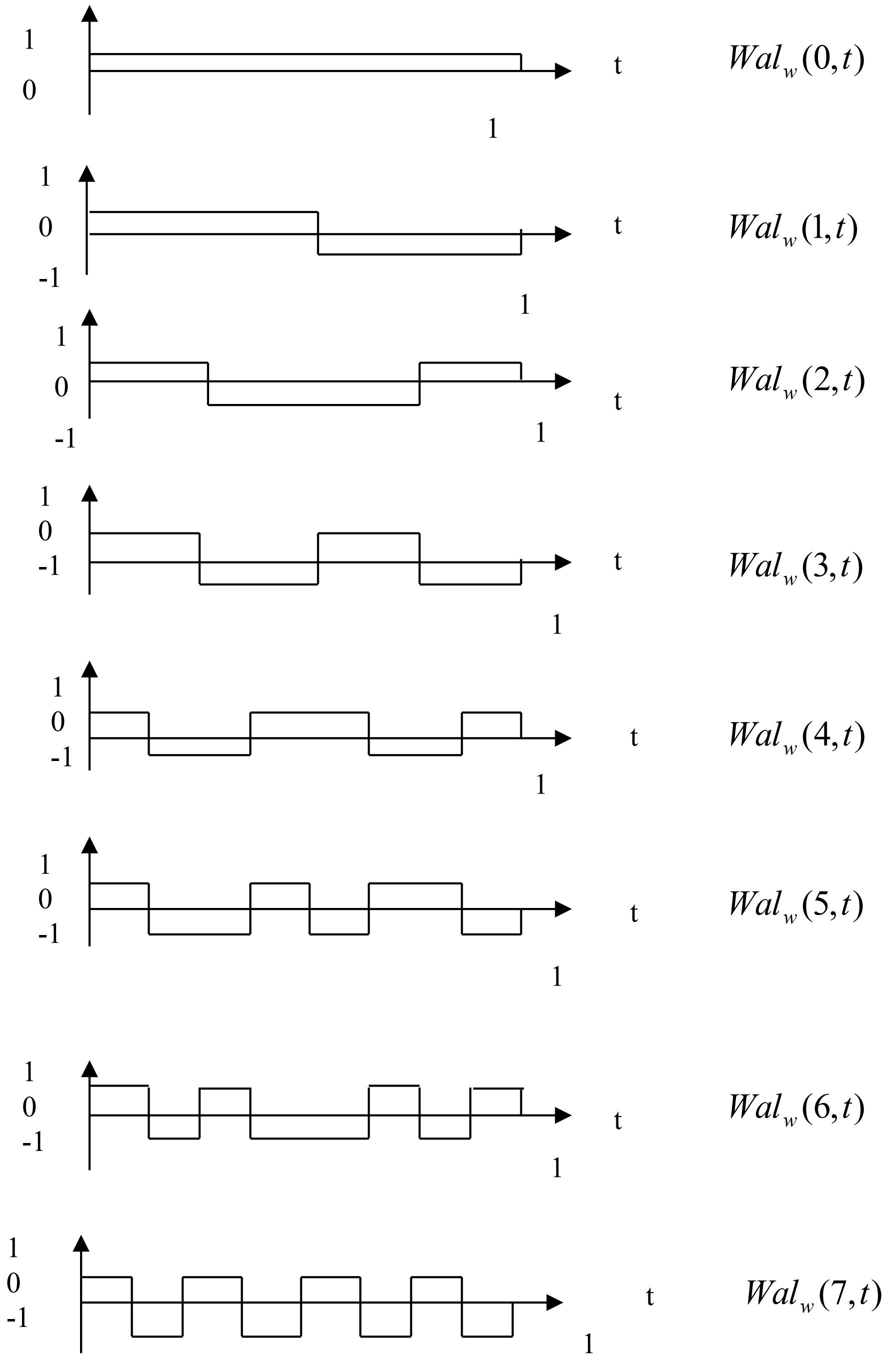


图 3—10

按沃尔什排列的沃尔什函数

从波形上可总结出如下规律：

1）在$wal_W(i,t)$中，i 就是波形在正交区间的变号次数；

如： $wal_W(0,t)$ 变号次数为0；

$wal_W(1,t)$ 变号次数为1；

$wal_W(2,t)$ 变号次数为2；

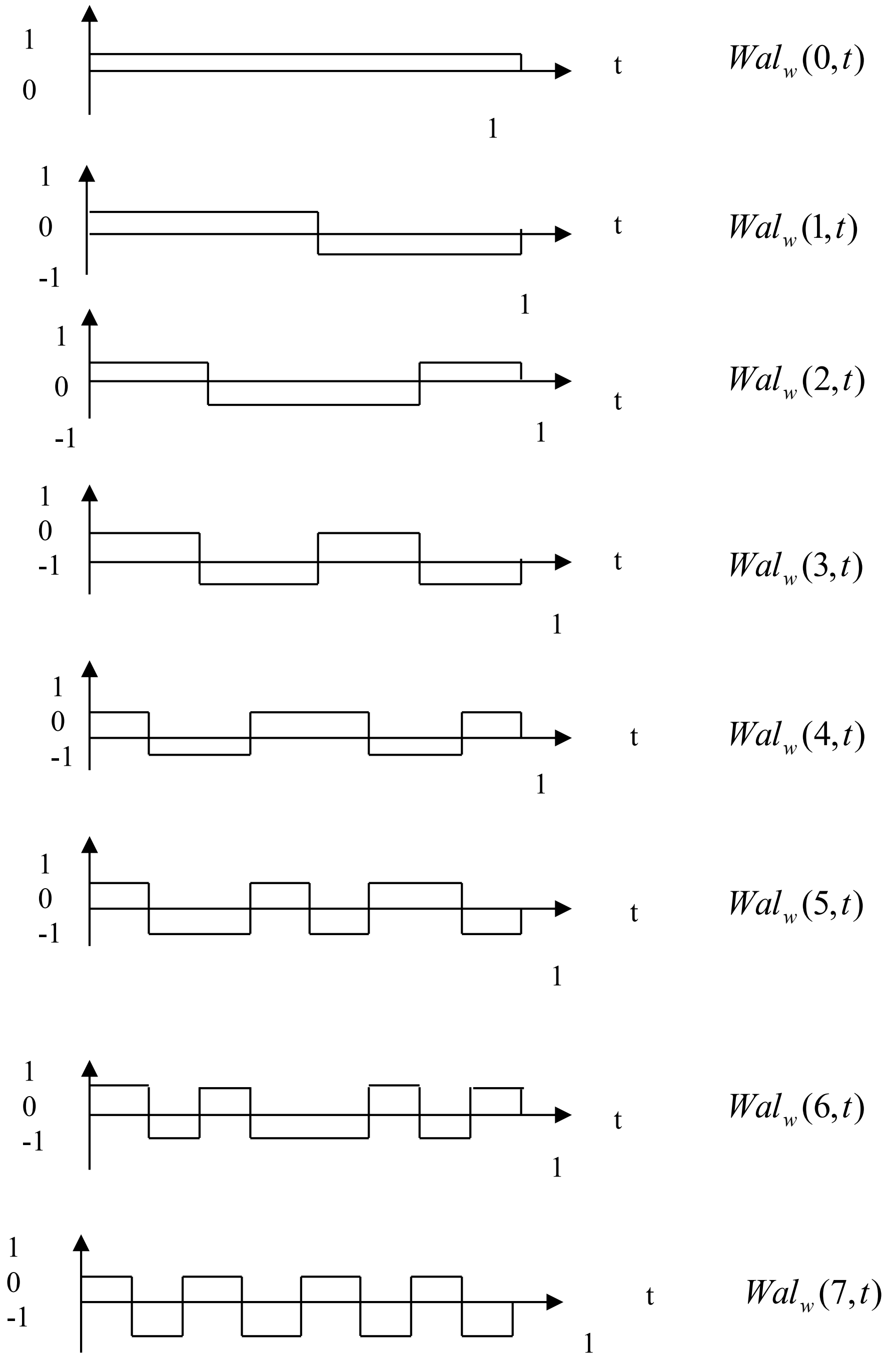


图 3—10

按沃尔什排列的沃尔什函数

2）列率：通常把正交区间内波形变号次数的二分之一称为列率(*sequency*)。如果令 *i* 为波形在正交区间内的变号次数，那么，按照*i*为奇数或偶数，函数 $wal_W(i,t)$ 的列率将分别由下式来决定：

$$S_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \dfrac{i+1}{2} & i = odd \\ \dfrac{i}{2} & i = even \end{cases}$$

3）按沃尔什排列的沃尔什函数可由拉德梅克函数构成，它的表达式如下

$$wal_W(i,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k} \qquad (3—105)$$

$$g(i)_k \in \{0,1\}$$

式中$R(k+1,t)$是拉德梅克函数，$g(i)$是为i的格雷码，$g(i)_k$是此格雷码的第k位，p为格雷码长度。

一个正整数可以编成自然二进码，也可以编成格雷码。格雷码也称反射码。格雷码的特点是：两个相邻数的格雷码只有一个码位的值不同。例如：

2的格雷码是 **(0 0 1 1)**，

3的格雷码为 **(0 0 1 0)**。

这两个相邻的数字的格雷码只有第四个码位的值不同。

在脉冲编码技术中，常常采用这种码，以便得到较好的误差纠错特性。一个正整数的自然二进码和格雷码之间是可以互相转换的。从自然二进码转成格雷码的方法如下：

设一个十进制数的自然二进码为：

$$n=\left(n_{p-1}n_{p-2}\cdots\cdots n_{k}\cdots\cdots n_{2}n_{1}n_{0}\right)_{B}$$

并设该数的格雷码为：

$$g=\left(g_{p-1}g_{p-2}\cdots\cdots g_{k}\cdots\cdots g_{2}g_{1}g_{0}\right)_{G}$$

其中 n_k 和 g_k 分别为自然二进码和格雷码内的码位数字，并且 n_k、$g_k\in\{0,1\}$。它们之间的关系可用式(3—106)表示：

$$
\begin{cases}
g_{p-1} = n_{p-1} \\
g_{p-2} = n_{p-1} \oplus n_{p-2} \\
g_{p-3} = n_{p-2} \oplus n_{p-3} \\
\quad \cdots \\
g_{k} = n_{k-1} \oplus n_{k} \\
\quad \cdots \\
g_{1} = n_{2} \oplus n_{1} \\
g_{0} = n_{1} \oplus n_{0}
\end{cases}
\tag{3—106}
$$

式中 $\oplus$ 代表模 2 加。

模2加的规律：

$$1 \oplus 1 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$0 \oplus 0 = 0$$

例： **P=4 试求（2）的格雷码。**

解：

$$n(2) = (0010)_B$$

其中：

$$n_3 = 0$$

$$n_2 = 0$$

$$n_1 = 1$$

$$n_0 = 0$$

$$g_3 = n_3 = 0$$

$$g_2 = n_3 \oplus n_2 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$g_1 = n_2 \oplus n_1 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$g_0 = n_1 \oplus n_0 = 1 \oplus 0 = 1$$

其格雷码 $g(2) = (0011)_g$

同理　若　$n(3)=(0011)_B$　则其格雷码为

$$g(3)=(0010)_g$$

在格雷码中，有如下关系存在：

$$g(m)\oplus g(n)=g(m\oplus n) \qquad (3—107)$$

例：设：

$$m = 2 = (0010)_B$$

$$n = 3 = (0011)_B$$

$$g(2) = (0011)_g$$

$$g(3) = (0010)_g$$

则 $g(2) \oplus g(3) = (0001)$

而 $(2)_B \quad \oplus (3)_B \quad = (0001)$

所以： $g(2) \oplus g(3) = g(2 \oplus 3)$

从格雷码也可以求出十进数的自然二进码。其转换方法如下：

设正整数的格雷码为：

$$g(n) = (g_{p-1} g_{p-2} g_{p-3} \cdots\cdots g_k \cdots\cdots g_2 g_1 g_0)$$

又设其自然二进码为：

$$B(n) = (n_{p-1} n_{p-2} n_{p-3} \cdots\cdots n_k \cdots\cdots n_2 n_1 n_0)$$

则

$$\begin{cases} n_{p-1} = g_{p-1} \\ n_{p-2} = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \\ n_{p-3} = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \oplus g_{p-3} \\ \cdots \\ n_k = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \oplus g_{p-3} \oplus \cdots\cdots \oplus g_k \\ \cdots \\ n_2 = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \oplus g_{p-3} \oplus \cdots\cdots \oplus g_2 \\ n_1 = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \oplus g_{p-3} \oplus \cdots\cdots \oplus g_2 \oplus g_1 \\ n_0 = g_{p-1} \oplus g_{p-2} \oplus g_{p-3} \oplus \cdots\cdots \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0 \end{cases} \tag{3—108}$$

例：n的格雷码为**1011**，求其自然二进码表示。

由给定的格雷码可知：$(n)_g = (1011)$

其中：

$$g_3 = 1$$

$$g_2 = 0$$

$$g_1 = 1$$

$$g_0 = 1$$

所以：

$$n_3 = g_3 = 1$$

$$n_2 = g_3 \oplus g_2 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$n_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$n_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

即：自然二进码为 $(1101)_B$

以上便是格雷码的定义及格雷码与自然二进码之间的转换方法。

例：用公式(3—105)求 $p=4$ 时的 $wal_w(5,t)$ 。

解： 因为$i=5$，所以5的自然二进码为(0101)。由前面所述的转换规则可得到格雷码为(0111)。因此，有下面的对应关系

$$g(5)_3 \quad g(5)_2 \quad g(5)_1 \quad g(5)_0$$

$$\begin{array}{cccc} (0 & 1 & 1 & 1) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第}\mathbf{3}\text{位} & \text{第}\mathbf{2}\text{位} & \text{第}\mathbf{1}\text{位} & \text{第}\mathbf{0}\text{位} \end{array}$$

即

$$g(5)_0 = 1, \ \ g(5)_1 = 1$$

$$g(5)_2 = 1, \ \ g(5)_3 = 0$$

代入式(3—105)得

$$wal_W(i,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k}$$

$$wal_w(5,t)=\left[R(1,t)\right]^1\cdot\left[R(2,t)\right]^1\cdot\left[R(3,t)\right]^1\cdot\left[R(4,t)\right]^0$$

$$=R(1,t)\cdot R(2,t)\cdot R(3,t)$$

2. 按佩利排列的沃尔什函数

用 $wal_p(i,t)$ 来表示按佩利排列的沃尔什函数，

其波形如图3—11所示。

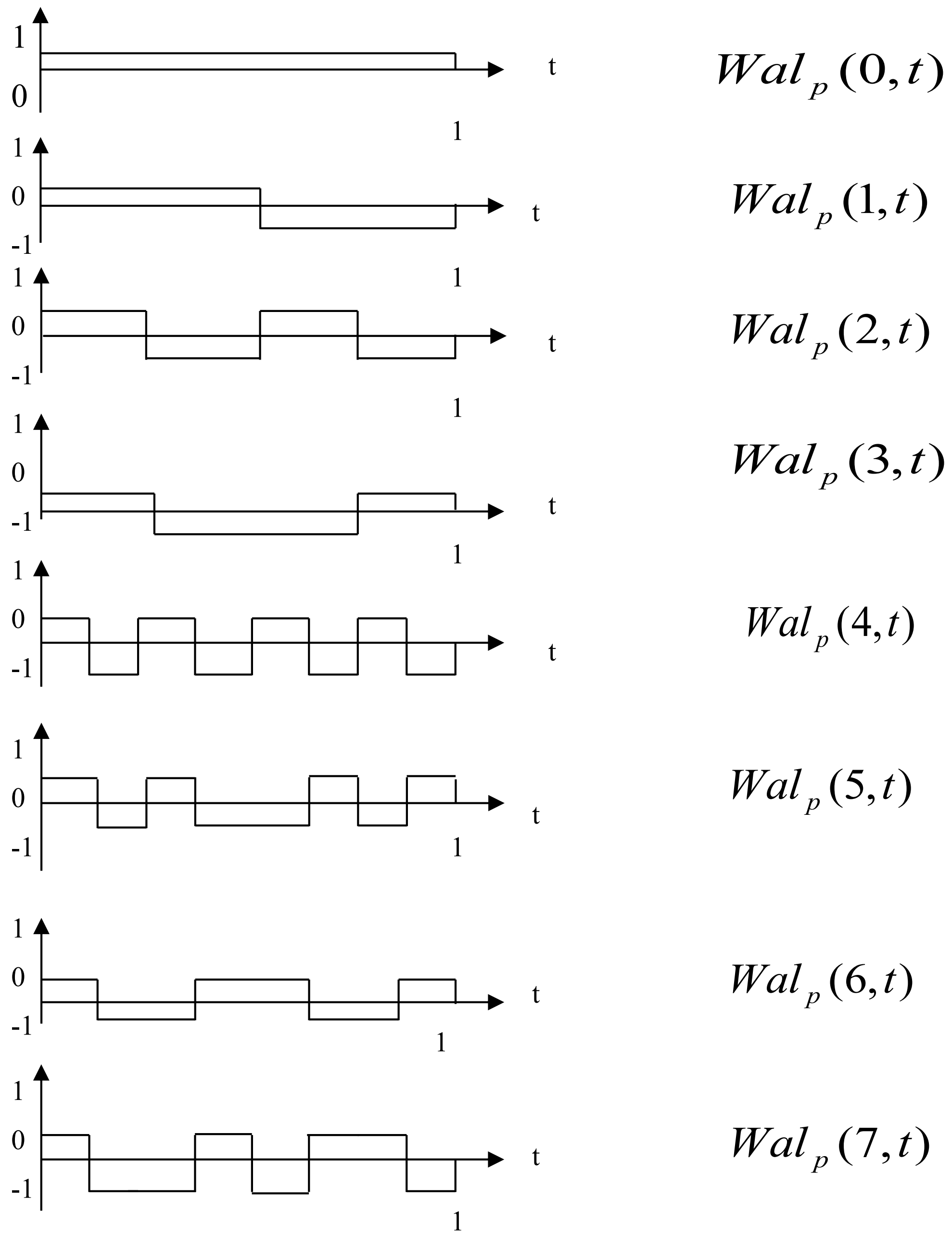


图 3—11　按佩利排列的沃尔什函数

按佩利排列的沃尔什函数也可以由拉德梅克函数产生。其定义由下式表示

$$wal_P(i,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{i_k} \qquad \textbf{(3—111)}$$

式中 $R(k+1,t)$ 是拉德梅克函数，$i_k \in \{0,1\}$ 是将函数序号写成自然二进码的第***k***位数字 i_k。即：

$$(i) \quad =(i_{n-1}i_{n-2}\cdots\cdots i_2 i_1 i_0)_B$$

例：p=3时，求 $wal_p(1,t)$

因为i=1，所以自然二进码为：

$$\begin{array}{ccc} [0 & 0 & 1] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第2位} & \text{第1位} & \text{第0位} \end{array}$$

代入式(3—111)得：

$$wal_P(1,t)=\prod_{k=0}^{2}\left[R(k+1,t)\right]^{i_k}$$

$$=[R(1,t)]^1\cdot[R(2,t)]^0\cdot[R(3,t)]^0\cdot=R(1,t)$$

例：p=3，求 $wal_p(5,t)$ 。

因为*i*=5，所以，自然二进码为(101)，代入式(3—111)，则

$$wal_P(5,t)=\prod_{k=0}^{2}\left[R(k+1,t)\right]^{i_k}$$

$$=[R(1,t)]^1\cdot[R(2,t)]^0\cdot[R(3,t)0]^1\cdot=R(1,t)\cdot R(3,t)$$

由按佩利排列的沃尔什函数前8个波形的规律：

1)、函数序号*i*与正交区间内取值符号变化次数有表3—1所列之关系。

表3.1 按佩利排列的沃尔什函数序号与变号次数的关系

i	0	1	2	3	4	5	6	7
变号数	0	1	3	2	7	6	4	5

2)、*i*与变号次数的关系是自然二进码与格雷码的关系。如$i=6=(110)_B$，这个自然二进制码按格雷码读出是4，也就是说，把十进制数变成自然二进码，然后按格雷码的规律反变回十进制数，这个数就是这个序号的沃尔什函数的变号次数。

3. 按哈达玛排列的沃尔什函数

按哈达玛排列的沃尔什函数是从2^n阶哈达玛矩阵得来的，矩阵每一行的符号变化规律，对应某个沃尔什函数在正交区间内符号变化的规律，也就是说每一行就对应着一个离散沃尔什函数。2^n阶哈达玛矩阵有如下形式：

$$H(0) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{3—113}$$

$$H(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3—114}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3—115}$$

一般情况

$$H(m)=\begin{bmatrix} H(m-1) & H(m-1) \\ H(m-1) & -H(m-1) \end{bmatrix}=H(m-1)\otimes H(1)$$

(3—116)

式(3—116)是哈达玛矩阵的递推关系式。利用这个关系式可以产生任意2^n阶哈达玛矩阵。这个关系也叫做克罗内克积关系，或叫直积关系。

按哈达玛排列的沃尔什函数用 $wal_h(i,t)$ 来表示。它的前八个函数波形如图**3—12**所示。按哈达玛排列的沃尔什函数也可以写成矩阵式

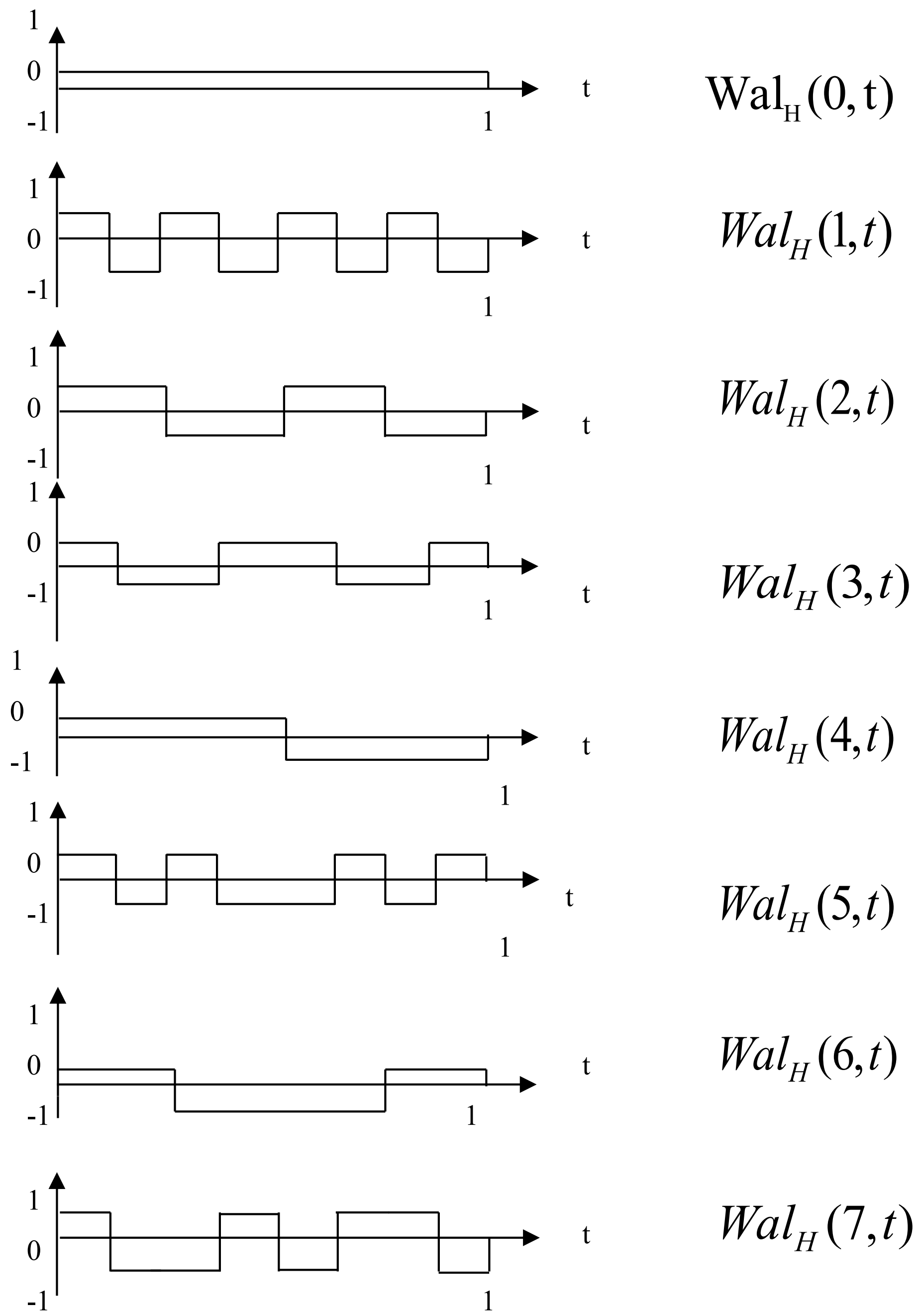


图 3—12 按哈达玛排列的沃尔什函数

$$H_h(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3—117}$$

按哈达玛排列的沃尔什函数有如下一些特点：

1)、从2阶哈达玛矩阵可得到2个沃尔什函数，从4阶哈达玛矩阵可得到4个沃尔什函数，一般地说，2^n阶哈达玛矩阵可得到 2^n 个沃尔什函数。

2)、由不同阶数的哈达玛矩阵得到的沃尔什函数排列顺序是不同的。例如，从$H_h(4)$得到的沃尔什函数$wal_h(2,t)$ 并不是从$H_h(8)$得到的$wal_h(2,t)$，而是从$H_h(8)$ 得到的$wal_h(4,t)$。

3)、哈达玛矩阵的简单递推关系，使得按哈达玛排列的沃尔什函数特别容易记忆。

4)、按哈达玛排列的沃尔什函数也可以由拉德梅克函数产生，解析式如式**(3—118)**所示。

$$wal_h(i,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{\langle i_k\rangle} \quad \textbf{(3—118)}$$

式中 $R(k+1,t)$ 仍然是拉德梅克函数，$< i_k >$是把***i***的自然二进码反写后的第***k***位数字，并且 $i_k \in \{0,1\}$ ，

也就是

$$(i) = (i_{n-1} i_{n-2} \cdots\cdots i_2 i_1 i_0)$$

反写后 $\langle \mathrm{i} \rangle = (\mathrm{i}_0\ \mathrm{i}_1\ \mathrm{i}_2 \cdots\cdots \mathrm{i}_{\mathrm{n}-2}\ \ \mathrm{i}_{\mathrm{n}-1})$

$$\cdots\cdots \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

第1位第0位

例：求***p*=3**时， $wal_h(6,t)$ 的波形。

一种方法可用比较简单的方法是写出 $2^n = 2^3 = 8$

阶哈达玛矩阵 $H_h(8)$ ，并自上而下从**0**数起至第**6**行

就是 $wal_h(6,t)$ 。

第二种方法是应用数学解析式。因为

$i = 6 = (110)_B$ ，所以：

$$\langle i \rangle = (\,0 \quad 1 \quad 1\,)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\langle \mathrm{i}_2 \rangle \ \langle \mathrm{i}_1 \rangle \langle \mathrm{i}_0 \rangle$$

代入式(3—118)得

$$wal_h(6,t)=[R(1,t)]^{\langle i_0\rangle}\cdot[R(2,t)]^{\langle i_1\rangle}\cdot[R(3,t)]^{\langle i_2\rangle}=R(1,t)\cdot R(2,t)$$

三种定义的沃尔什函数，尽管它们的排列顺序各不相同，但三种排序方法得到的沃尔什函数是有一定关系的。它们之间的关系如表**3—2**和图**3—13**所示。

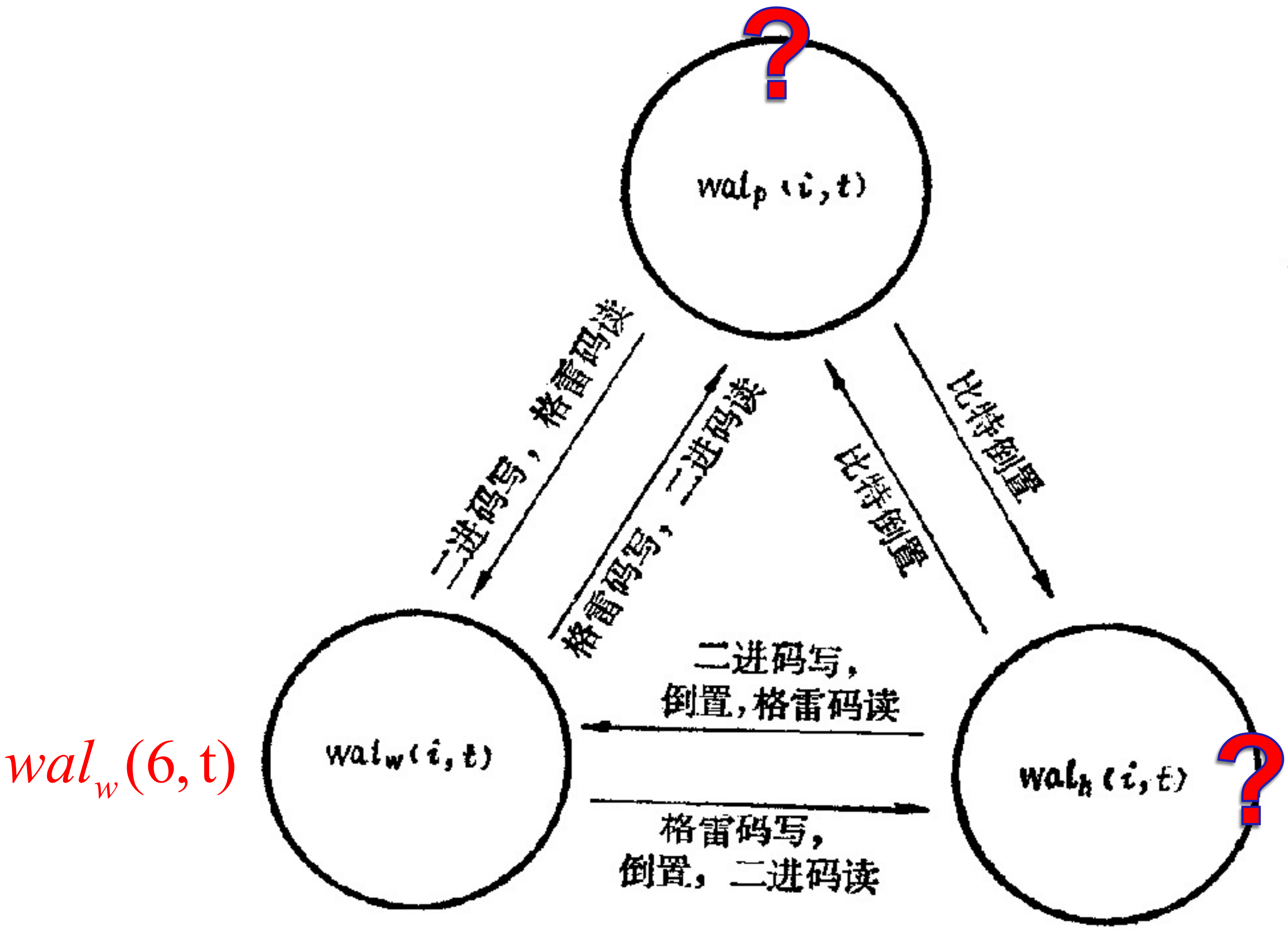


图 3—13 三种定义的沃尔什函数序号间的关系

例如 $Wal_p(2,t)$ 的 $wal_w(i,t)$ 和 $wal_H(i,t)$ 间的关系如下：$2=(010)_B$，按格雷码读，即$(010)_G=3$，所以就是 $wal_w(3,t)$，(010)比特倒置后为(010)，按二进码读仍为2，则 $wal_p(2,t)$ 就是 $wal_H(2,t)$。其他以此类推。以上就是沃尔什函数三种定义之间的关系。

表3-2 三种排列的前 8 个沃尔什函数之间的关系表

$wal_h(i,t)$	$wal_w(i,t)$	$wal_p(i,t)$
$wal_h(0,t)$	$wal_w(0,t)$	$wal_p(0,t)$
$wal_h(1,t)$	$wal_w(7,t)$	$wal_p(4,t)$
$wal_h(2,t)$	$wal_w(3,t)$	$wal_p(2,t)$
$wal_h(3,t)$	$wal_w(4,t)$	$wal_p(6,t)$
$wal_h(4,t)$	$wal_w(1,t)$	$wal_p(1,t)$
$wal_h(5,t)$	$wal_w(6,t)$	$wal_p(5,t)$
$wal_h(6,t)$	$wal_w(2,t)$	$wal_p(3,t)$
$wal_h(7,t)$	$wal_w(5,t)$	$wal_p(7,t)$